a) ▶ **Untersuchen der Symmetrie des Graphen von f** (2 Pkt.)

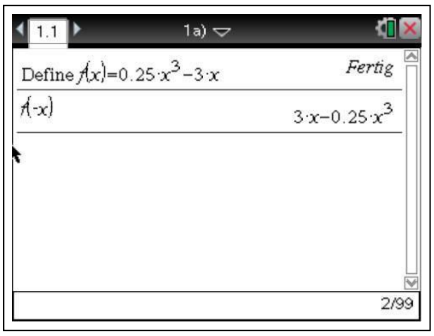
Im ersten Schritt prüfen wir auf **Achsensymmetrie**, im zweiten auf **Punktsymmetrie**.

Wenn ein Graph **achsensymmetrisch zur y-Achse** ist, gilt: $f(x) = f(-x)$

Dies kannst du ganz leicht mit deinem CAS überprüfen:

Definiere f mit $\boxed{\text{Aktionen} \rightarrow \text{Define}}$ und tippe danach $f(-x)$ ein

Du siehst, dass $f(x) \neq f(-x)$ ist.



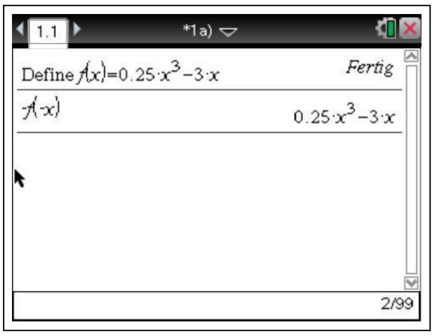
Der Graph ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, weil $f(x) \neq f(-x)$ ist.

Im nächsten Schritt musst du die **Punktsymmetrie zum Ursprung** überprüfen. Bei der Punktsymmetrie zum Ursprung gilt folgende Bedingung: $f(x) = -f(-x)$

Auch das kannst du mit deinem CAS überprüfen:

Da du die Funktion bereits definiert hast, brauchst du das nicht nochmals zu tun. Daher musst du nur noch $-f(-x)$ eintippen.

In diesem Fall ist $f(x) = -f(-x)$.



Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil $f(x) = -f(-x)$ zutrifft.

b) ▶ **Beispiele dafür, dass sich die Eigenschaften des Graphen der Funktion f' aus den Eigenschaften der Funktion f ergeben** (4 Pkt.)

Als Beispiele eignen sich drei Punkte: der Hochpunkt in $P(-2|4)$, der Tiefpunkt in $Q(2|-4)$ und der Wendepunkt in $O(0|0)$.

Beispiel 1: Hochpunkt des Graphen von f in $P(-2|4)$
Bei einem Hochpunkt ist die Steigung der Funktion gleich Null.
Da die Ableitung einer Funktion die Steigung der Funktion angibt, hat der Graph von f' an der Stelle x=-2 eine Nullstelle.
Außerdem gilt bei einem Hochpunkt, dass die Steigung sich von positiv nach negativ ändert.
Der Graph von f' hat daher an der Stelle x=-2 einen Vorzeichenwechsel von plus nach minus.

Beispiel 2: Wendepunkt des Graphen von f in $O(0|0)$
Bei einem Wendepunkt ist die Steigung der Funktion maximal oder minimal.
Aus diesem Grund hat der Graph von f' im Punkt O einen Extrempunkt.
Da sich das Krümmungsverhalten des Graphs von f von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt ändert, hat der Graph von f' an der Stelle x=0 einen Tiefpunkt.

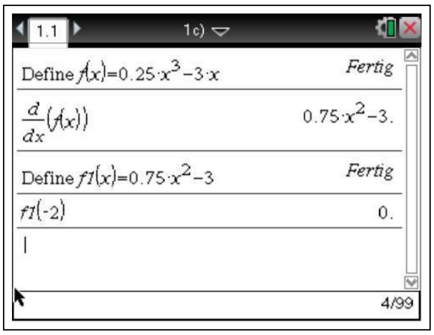
c) ▶ **Nachweis für Hoch- und Tiefpunkte** (9 Pkt.)

Um nachzuweisen, dass der Graph von f im Punkt $H(-2|4)$ einen Hochpunkt hat, musst du zuerst zeigen, dass die erste Ableitung von f (f') an der Stelle x=-2 Null ist **(notwendige Bedingung)**. Im zweiten Schritt musst du nachweisen, dass $f''(-2) < 0$ ist **(hinreichende Bedingung)**.

Dafür brauchst du dein CAS:

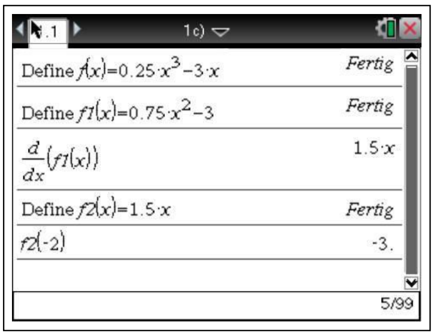
1) notwendige Bedingung:

Die Funktion hast du schon definiert. Die erste Ableitung der Funktion erhälst du durch: $\boxed{\text{Analysis} \rightarrow \text{Ableitung}}$, tippe nun ein x in das Kästchen und $f(x)$ in das Kästchen in der Klammer.
Definiere die Ableitung nun unter $\boxed{\text{Aktionen} \rightarrow \text{Define}}$.
Tippe dann die erste Ableitung $f1(x)$ ein.
Tippe jetzt $f1(-2)$ ein.



2) hinreichende Bedingung:

$f(x)$ und $f1(x)$ hast du bereits definiert. Jetzt leitest du $f1(x)$ nochmals ab, um die zweite Ableitung zu erhalten: $\boxed{\text{Analyis} \rightarrow \text{Ableitung}}$, tippe nun ein x in das Kästchen und $f1(x)$ in das Kästchen in der Klammer.
Definiere die Ableitung nun unter $\boxed{\text{Aktionen} \rightarrow \text{Define}}$.
Tippe dann die zweite Ableitung $f2(x)$ ein.
Tippe jetzt $f2(-2)$ ein.



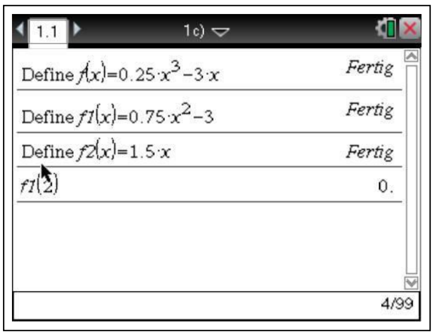
Da $\boldsymbol{f'(-2) = 0}$ und $\boldsymbol{f''(-2) < 0}$, hat der Graph von f an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.

Um nachzuweisen, dass der Graph von f im Punkt $T(2|-4)$ einen Tiefpunkt hat, musst du zuerst zeigen, dass die erste Ableitung von f (f') an der Stelle x=2 Null ist **(notwendige Bedingung)**. Im zweiten Schritt musst du nachweisen, dass $f''(2) > 0$ ist **(hinreichende Bedingung)**.

Dafür brauchst du wieder dein CAS:

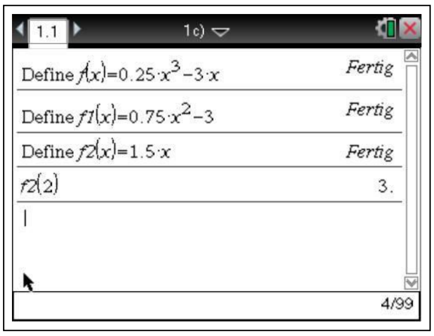
1) notwendige Bedingung:

Die Funktion und deren erste und zweite Ableitung hast du schon definiert.
Daher musst du nur noch $f1(2)$ eintippen.



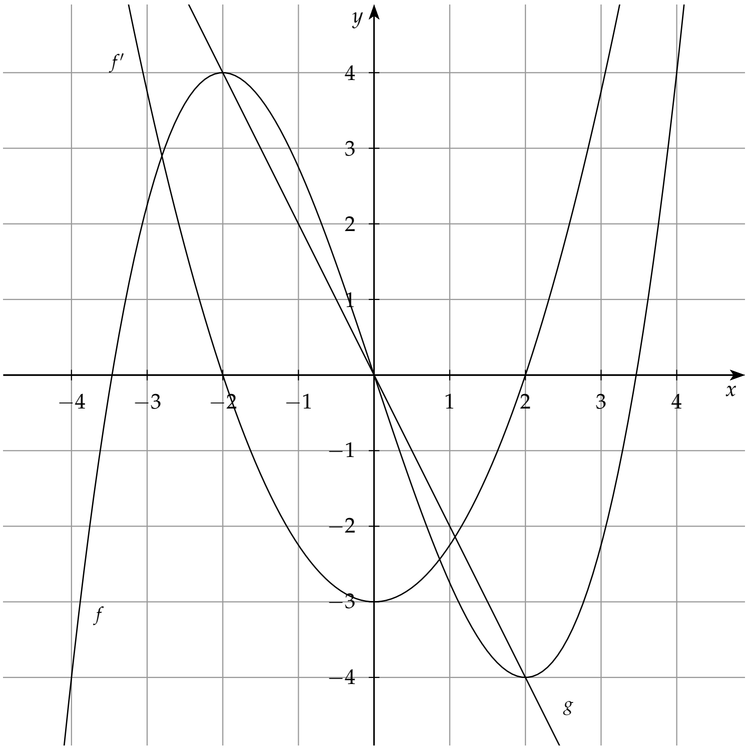
2) hinreichende Bedingung

Die Funktion und deren erste und zweite Ableitung hast du schon definiert.
Daher musst du nur noch $f2(2)$ eintippen.



Da $\boldsymbol{f'(2) = 0}$ und $\boldsymbol{f''(2) > 0}$, hat der Graph von f an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt.

► Einzeichnen der Geraden g und Bestimmen deren Geradengleichung



Um die Geradengleichung der Geraden g zu bestimmen ist die Geradengleichung $y = m \cdot x + b$ wichtig.
Nun musst du die Werte für m (Steigung) und b (y-Achsenabschnitt) bestimmen. Hierfür sind zwei Gleichungen nötig. Diese bekommst du, indem du zwei Punkte in die Geradengleichung einsetzt. Am einfachsten ist es, wenn du die Punkte H und T verwendest, da sie auf der Geraden g liegen und du sie schon bestimmt hast.

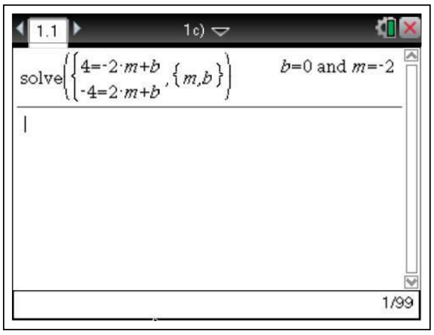
1. $H(-2|4) \quad \Rightarrow \quad 4 = m(-2) + b$
2. $T(2|-4) \quad \Rightarrow \quad -4 = m(2) + b$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 4 = -2m + b \\ -4 = 2m + b \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem kannst du mit deinem CAS lösen:

Wenn du $\boxed{\text{Algebra} \rightarrow \text{Gleichungssystem lösen}}$ auswählst, kannst du die Gleichungen in deinen CAS eintippen. Wähle aus: $\boxed{\text{Anzahl der Gleichungen: 2; Variablen: m,b}}$
Wenn du jetzt $\boxed{\text{OK}}$ auswählst, erscheint eine Vorlage für das Gleichungssystem im Bildschirm. Hier musst du nur noch die Gleichungen eintippen.



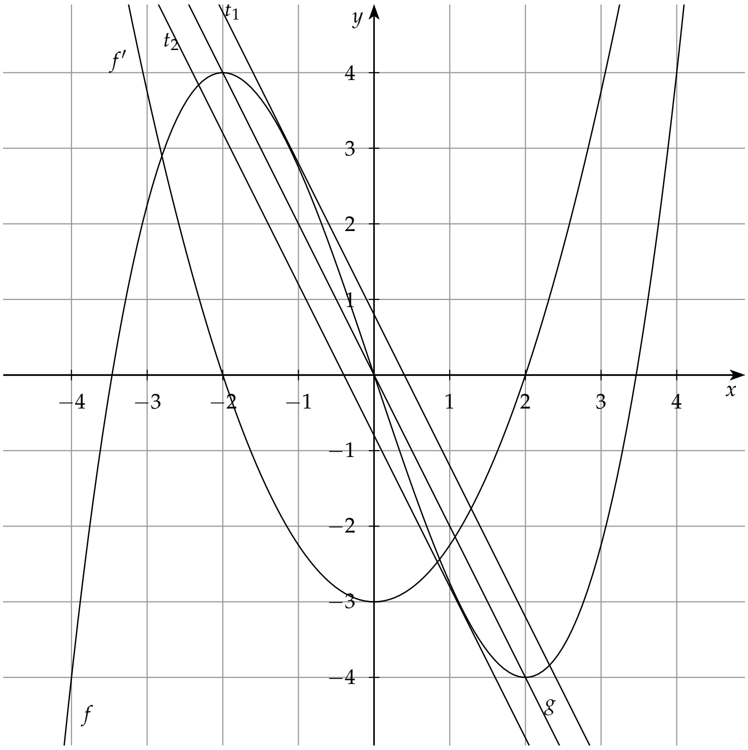
Als Lösungen erhälst du $m = -2$ und $b = 0$. Wenn du nun diese Werte in $y = m \cdot x + b$ einsetzt, erhälst du die Geradengleichung.
Die Geradengleichung der Geraden g lautet: $g : y = -2x$.

d) ► **Zeichnerische Bestimmung von P_1 und P_2** (7 Pkt.)

Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve in einem bestimmten Punkt berührt. Diesen Punkt musst du für zwei Tangenten bestimmen. Damit eine Gerade eine Kurve in einem Punkt berührt, muss sie in diesem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve haben. Du suchst also einen Punkt, in dem die Tangente die gleiche Steigung wie f hat.
Parallele Geraden haben die gleiche Steigung m. Die Tangenten t_1 und t_2 haben daher die gleiche Steigung wie g, also $m = -2$.
Nun musst du die Punkte auf der Funktion f bestimmen, an dem f die Steigung $m = -2$ hat. Diese Punkte findest du mit Hilfe von f'. f' gibt zu jedem x-Wert von f die zugehörige Steigung an. Du suchst also diejenigen x-Werte, bei denen f' gleich -2 ist.
Dies ist an den Stellen $x_1 \approx -1,2$ und $x_1 \approx 1,2$ der Fall.
Wenn du nun die Gerade g parallel verschiebst, bis sie den Graphen der Funktion f berührt, siehst du, wo sich die Stellen x_1 und x_2 auf dem Graphen der Funktion f befinden.
Die y-Werte an den Stellen x_1 und x_2 kannst du jetzt einfach an der Funktion f ablesen.

Die Punkte, die Tangenten haben, welche parallel zu g sind lauten: $P_1(-1,2|3)$ und $P_2(1,2|-3)$.

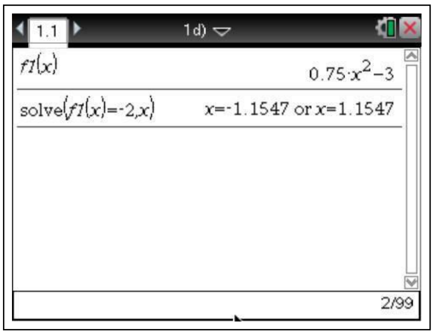
Skizze



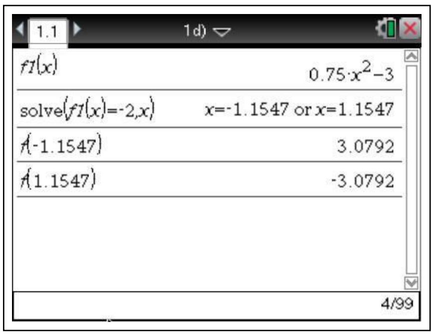
► **Berechnung von P_1 und P_2**

Gesucht sind die Punkte P_1 und P_2 an denen die Steigung gleich -2 ist.
Löse zuerst die Gleichung $\boldsymbol{f'(x) = -2}$ mit Hilfe deines CAS. Danach musst du nur noch die zugehörigen **Funktionswerte** ausrechnen.

Da die Funktion schon definiert ist, kannst du über $\boxed{\text{Algebra} \to \text{Löse}}$ die Gleichung eintippen und lösen lassen.



Die Funktionswerte berechnet das CAS dir, wenn du $f(-1.1547)$ und $f(1.1547)$ eingibst.



Die genauen Werte der beiden Punkte sind $P_1(-1,1547|3,0792)$ und $P_2(1,1547|-3,0792)$.

e) ► **Rechnerische Überprüfung der Funktionsgleichungen** (6 Pkt.)

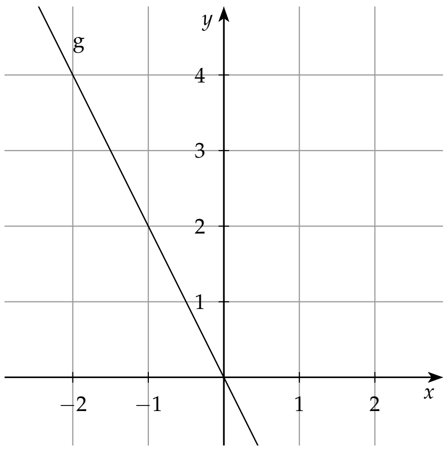
Der Graph von f muss so verschoben werden, dass der Hochpunkt H genau im Ursprung liegt. Die Verschiebung einer Kurve geht immer in zwei Schritten:
Zuerst verschiebst du den Graphen in Richtung der x-Achse. In diesem Fall musst du den Graphen um 2 Einheiten nach rechts, also in Richtung der x-Achse verschieben. Das wirkt sich folgendermaßen auf die Funktionsgleichung aus: $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3 - 3(x-2)$
Im zweiten Schritt verschiebst du den Graphen in Richtung der y-Achse. Hier musst du ihn um 4 Einheiten nach unten, also um -4 Einheiten in Richtung der y-Achse verschieben. Nach dieser Verschiebung lautet die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3 - 3(x-2) - 4$.
Nun musst du die Funktionsgleichung umformen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}(x-2)^3 - 3(x-2) - 4 \\
&= \frac{1}{4}(x-2)^2(x-2) - 3(x-2) - 4 && \mid \text{2. binomische Formel} \\
&= \frac{1}{4}(x^2-4x+4)(x-2) - 3(x-2) - 4 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\
&= \frac{1}{4}(x^3-2x^2-4x^2+8x+4x-8) - 3x + 6 - 4 && \mid \text{zusammenfassen} \\
&= \frac{1}{4}(x^3-6x^2+12x-8) - 3x + 2 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\
&= \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 - 3x + 2 \\
&= \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2
\end{aligned}$$

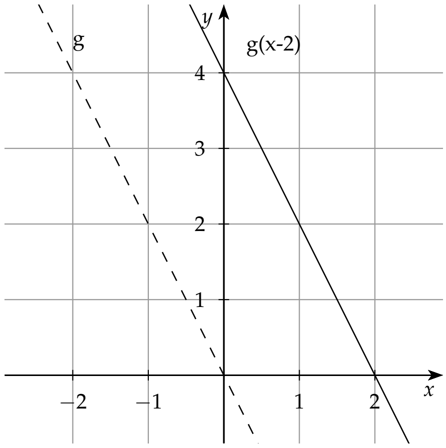
Dieser Funktionsterm entspricht dem Funktionsterm B.

► **Erklärung der Abbildung 2**

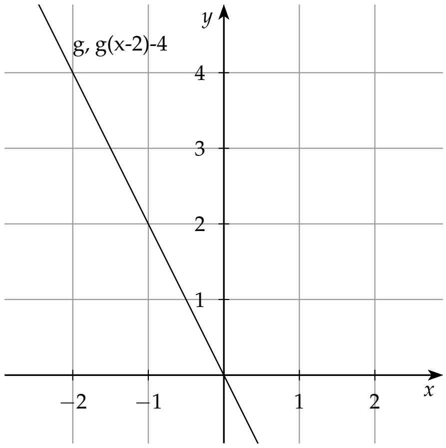
Der Funktionsterm $g(x-2) - 4$ entspricht einer Verschiebung des Graphen von $g(x)$. Die Funktion g wurde folgendermaßen verschoben:



Um 2 Einheiten in Richtung der x-Achse $\rightarrow g(x-2)$



Um -4 Einheiten in Richtung der y-Achse $\rightarrow g(x-2)-4$ Wenn man den Graphen so verschiebt, verschiebt man ihn entlang seines Verlaufes, da die Verschiebung der Steigung der Funktion entspricht. $g(x-2)-4$ ist daher identisch mit der Funktion g.



Das CAS gibt aus diesem Grund„True“ aus. Die Gleichung ist eine wahre Aussage.