▶ Funktion f ermitteln (5BE)

Das Volumen (V) eines Quaders setzt sich aus Länge · Breite · Höhe zusammen. Der in der Aufgabe beschriebene Quader besitzt eine quadratische Grundfläche mit der Länge und Breite $x+3$.

$V(x) = (x+3)\cdot(x+3)\cdot x$

$V(x) = (x+3)^2\cdot x$

$V(x) = \left(x^2+6x+9\right)\cdot x$

$V(x) = \left(x^3+6x^2+9x\right)$

Der Definitionsbereich gilt für alle positiven x-Werte. $\Longrightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$

▶ Volumen berechen

Die Grundfläche ($(x+3)\cdot(x+3)$) beträgt laut Aufgabenstellung 16 dm^2.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 16 \quad &&|\sqrt{\ } \\ x+3 &= 4 \quad &&|-3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Für $x=1$ besitzt die Grundfläche des Quaders 16 dm^2. Um das Volumen zu berechnen setzen wir $x=1$ in die Funktion V ein.

$V(x) = \left(x^3+6x^2+9x\right)$

$V(1) = \left(1^3+6\cdot1^2+9\cdot1\right)$

$V(1) = 16$

Das Volumen beträgt somit 16 dm^3.

▶ Nicht vorhandenes lokales und globales Maximum zeigen (5BE)

Für ein lokales Maximum muss die Bedingung $V'(x)=0$ erfüllt sein.

$$\begin{aligned} V(x) &= x^3+6x^2+9x \\ V'(x) &= 3x^2+12x+9 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der p-q-Formel sehen wir, dass die Funktion an den Stellen $x_1=-1$ und $x_2=-3$ zwei lokale Extremstellen besitzt. Diese beiden Extremstellen liegen außerhalb des Definitionsbereichs. Somit ist bewiesen, dass die Funktion im Definitionsbereich keine lokalen Extremstellen besitzt.

Um die Funktion auf ein globales Maximum zu untersuchen, lassen wir die Funktion gegen Unendlich laufen.

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^3+6x^2+9x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^3\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Wenn man x gegen Unendlich laufen lässt, werden die Nenner der Brüche immer größer und der Bruch nähert sich immer mehr 0 an. Somit nähert sich der gesamte Term immer mehr x^3 an. Bei steigendem x geht $V(x)$ immer mehr gegen unendlich. Somit ist bewiesen, dass kein globales Maximum vorliegt.