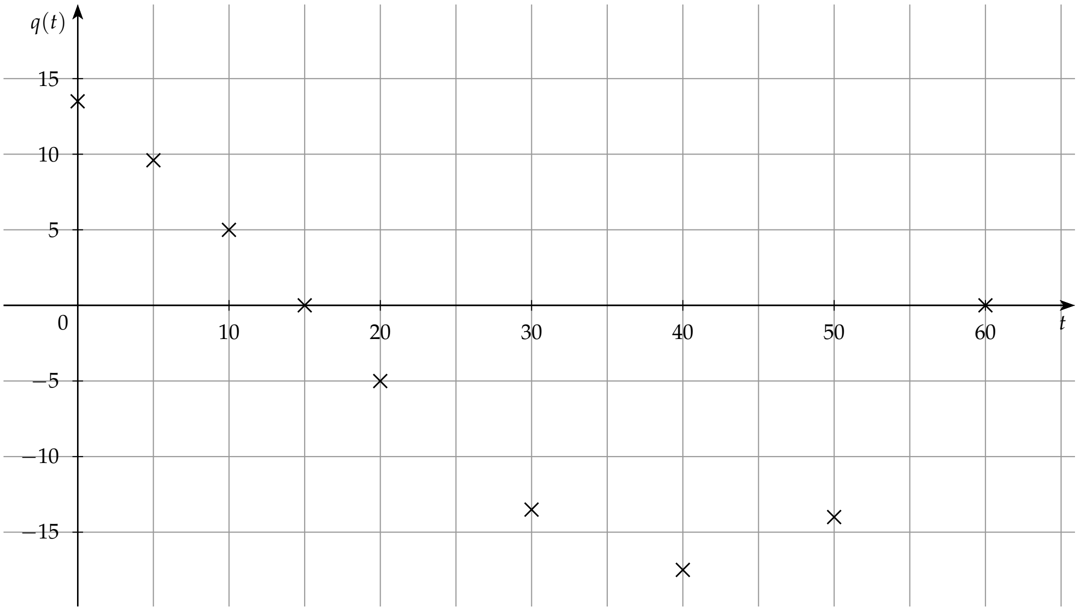
1.1 **► Graphische Darstellung von $q$ in Abhängigkeit der Zeit** (8P)

$q$ lässt sich als Punktdiagramm in Abhängigkeit von $t$ darstellen, $t$ liegt dabei auf der $x$- und $q(t)$ auf der $y$-Achse:




**► Zeitpunkt der maximalen Staulänge**

$q$ stellt über die Differenz der im Stau ankommenden und der aus dem Stau herausfahrenden Fahrzeuge die Änderungsrate der Anzahl der Fahrzeuge im Stau pro Zeit dar.

Im Schaubild kannst du erkennen, dass $q$ zunächst bis $t = 15$ positiv ist und danach negativ. Das bedeutet, dass zusätzlich zu den am Anfang im Stau vorhandenen 405 Autos zunächst bis zu diesem Zeitpunkt noch Autos hinzukommen und danach wieder mehr Autos wegfahren als dazustoßen.

Bei $t = 15$ befinden sich damit die meisten Autos im Stau.

**► Zeitpunkt des schnellsten Stauabbaus**

$q$ stellt die Änderungsrate der Fahrzeuge im Stau pro Zeit dar. Zum Zeitpunkt des schnellsten Stauabbaus muss die Differenz

$$q = q_1 - q_2$$

am negativsten sein, da die Zahl $q_2$ der aus dem Stau austretenden Autos dann am größten ist.

Aus dem Schaubild kannst du erkennen, dass bei $t = 40$ die Differenz $q = -17,5$ beträgt und $q$ dort sein Minimum im betrachteten Intervall annimmt.

40 Minuten nach Beginn der Messung baut sich der Stau damit am schnellsten ab.

**► Skizze für die Anzahl der Fahrzeuge im Stau**

Die Anzahl der Fahrzeuge im Stau werde durch die Funktion $Q$ dargestellt. Die Änderungsrate dieser Funktion, also die Änderungsrate der Anzahl der Fahrzeuge im Stau pro Zeit ist laut Aufgabentext $q$. Es gilt also:

$$Q'(t) = q(t).$$

Die Anzahl der Autos ist also bestimmt durch die Stammfunktion von $q$ zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Zudem ist bekannt, dass zu Beginn der Messung, also für $t = 0$

$Q(0) = 405$

und nach 60 Minuten, also für $t = 60$

$Q(60) = 0$

gilt.

Im Punktdiagramm kann man erkennen, dass es sich bei $q$ um eine Funktion 3. Grades handeln könnte, da das Schaubild zwei Extrempunkte und einen Wendepunkt vorweisen kann.

Mittels kubischer Regression kannst du daher eine näherungsweise passende Funktionsgleichung $q(t)$ ermitteln.

Ein Stammfunktion $Q$ von $q$ mit dem $y$-Achsenabschnitt $C$ kannst du über das Integral herausfinden. Ihre Gleichung lautet dann allgemein

$$Q(t) = \int q(t)\ \mathrm{d}t + C.$$

Über einen der beiden bekannten Punkte am Anfang und am Ende der Messung kannst du dann durch Einsetzen in die Gleichung den Parameter $C$ ermitteln.

Anschließend kann mithilfe einer Wertetabelle das Schaubild von $Q$ in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

Es werden also vier Arbeitsschritte benötigt:

1. Eine Näherunsfunktion $q$ durch kubische Regression bestimmen.
2. Durch Integration eine allgemeine Stammfunktion von $Q$ mit Parameter $C$ ermitteln.
3. $C$ durch Einsetzen der Koordinaten einer der bekannten Punkte bestimmen.
4. Mithilfe einer Wertetabelle das Schaubild von $Q$ skizzieren.

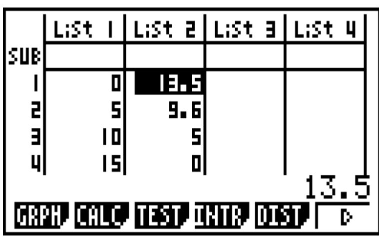
**1. Schritt: Näherungsfunktion $q$ durch kubische Regression bestimmen**

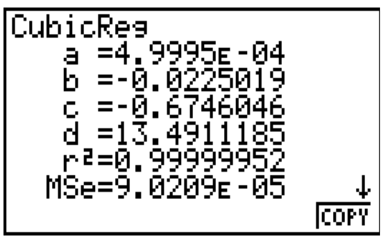
Allgemein hat eine Funktion 3. Grades die Form:

$$q(t) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Du kannst eine Näherungsfunktion $q$ durch kubische Regression mithilfe des GTR ermitteln.

Füge dazu die gegebene Wertetabelle über $\boxed{\texttt{MENU} \rightarrow 2}$ in den Listen-Editor ein. Gib dann über die Befehlsfolge $\boxed{\texttt{F2} \rightarrow \texttt{F3} \rightarrow \texttt{F4}}$ den Befehl zur kubischen Regression ein. Der GTR liefert dir dann die Parameterwerte für $a$, $b$, $c$ und $d$.



Der GTR liefert für die Paramter verschiedene Werte und einen $R_2$-Wert von nahezu 1, was einer sehr guten Näherung enspricht.

Die Näherungsfunktion $q$ hat damit die Gleichung:

$$\boldsymbol{q(t) = 0,0005x^3 - 0,0225x^2 - 0,6746x + 13,4911}.$$

**2. Schritt: Stammfunktion $Q$ von $q$ bestimmen**

Eine Stammfunktion $Q$ von $q$ hat allgemein die Form:

$$Q(t) = \int q(t)\ \mathrm{d}t + C.$$

Setze den Funktionsterm von $q$ in die Formel ein und bestimme die Stammfunktion:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int 0,0005x^3 - 0,0225x^2 - 0,6746x + 13,4911\ \mathrm{d}t + C \\ &= \boldsymbol{\frac{0,005}{4}x^4 - \frac{0,0225}{3}x^3 - \frac{0,6746}{2}x^2 + 13,4911x + C} \end{aligned}$$

**1. Schritt: Parameter $C$ bestimmen**

In der Funktionsgleichung von $Q$ ist noch ein Parameter enthalten. Jedoch sind auch Punkte der Kurve von $Q$ bekannt, etwa der $y$-Achsenabschnitt. Bei $t = 0$ beträgt die Anzahl $Q$ der Fahrzeuge im Stau 405, der Punkt $P_0$ hat damit die Koordinaten:

$P_0(0\,|\,405)$.

Setze die Koordinaten in $Q(t)$ ein und löse nach $C$:

$$\begin{aligned} Q(t) &= 0,0054x^4 - \frac{0,0225}{3}x^3 - \frac{0,6746}{2}x^2 + 13,4911x + C \\ 405 &= 0,0054 \cdot 0^4 - \frac{0,0225}{3} \cdot 0^3 - \frac{0,6746}{2} \cdot 0^2 + 13,4911 \cdot 0 + C \\ \boldsymbol{405} &= \boldsymbol{C} \end{aligned}$$

Du kannst nun die Funktionsgleichung anpassen:

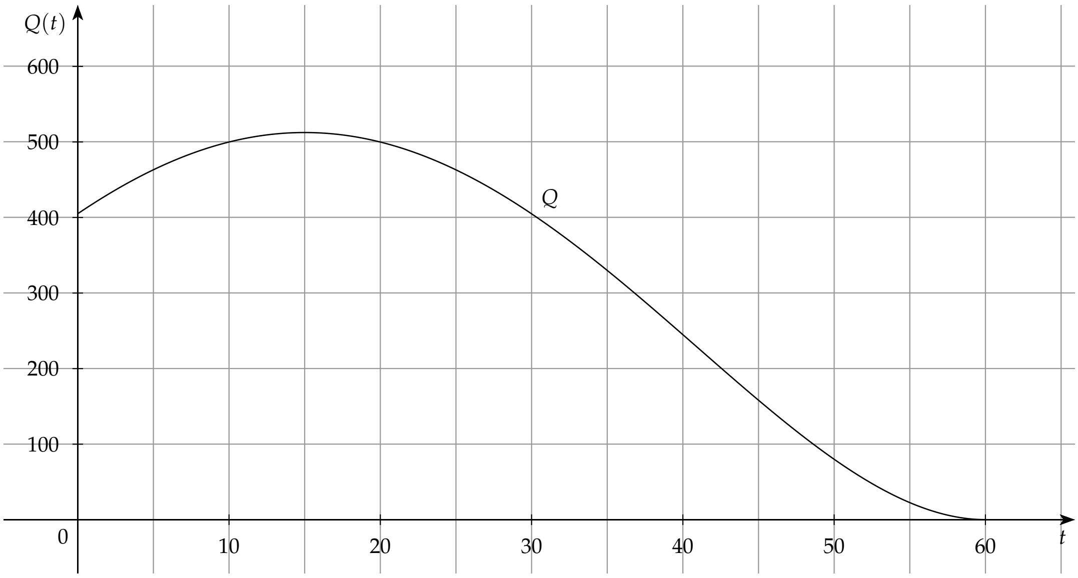
$$Q(t) = \boldsymbol{\frac{0,005}{4}x^4 - \frac{0,0225}{3}x^3 - \frac{0,6746}{2}x^2 + 13,4911x + 405}$$

**4. Schritt: Schaubild von $Q$ zeichnen**

$Q$ stellt nun die gesuchte Anzahl der Fahrzeuge im Stau in Abhängigkeit der Zeit dar.

Stelle eine Wertetabelle im passenden Intervall zusammen und zeichne das Schaubild:

| $t$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(t)$ | 405 | 463 | 500 | 513 | 500 | 463 | 405 | 330 | 245 | 158 | 80 | 23 | 0 |




1.2 **► Bestimmung der Konstanten** (3P)

Die Funktionsgleichung von $q$ wird hier in Produktform dargestellt:

$q(t) = a \cdot (t+30)(t-b)(t-c) \qquad \text{mit } t \in [0;60].$

Der Wert für $a$ lässt sich über fast jedes Wertepaar der Tabelle ermitteln, sofern die Konstanten $b$ und $c$ bekannt sind.

Es bietet sich hier an, anhand der Nullstellen der Funktion die Konstanten $b$ und $c$ zu bestimmen. An den Nullstellen der Funktion werden die Funktionswerte $q(t)$ gleich Null. Es gilt daher:

$$\begin{aligned} q(t) &= 0 \\ a \cdot (t+30)(t-b)(t-c) &= 0 \end{aligned}$$

Es gilt dabei der Satz vom Nullprodukt: Wenn ein Produkt Null wird, so muss einer seiner Faktoren Null sein. Du kannst also jeden Faktor mit $t$ gleich Null setzen und diese Gleichung, wenn lösbar, ergibt eine Nullstelle der Funktion:

(1) $t+30=0$

(1a) $t=-30$ Nicht definiert, da $0 < t < 60$ sein muss!

(2) $t-b=0$

(3) $t-c=0$

(2a) $t=b$

(3a) $t=c$

An den Nullstellen gilt also einmal die Gleichung (2a) und (3a).

Bekannt ist aus der Wertetabelle, dass $q(t)$ für $t = 15$ und $t = 60$ Null wird, es befinden sich dort also Nullstellen. Daraus folgt: Wenn $\boldsymbol{b = 15}$ und $\boldsymbol{c = 60}$ ist, dann wird für $t = 15$ und $t = 60$ der Funktionswert Null.

Wir können die Funktionsgleichung damit anpassen:

$q(t) = a(t+30)(t-15)(t-60)$

Die einzig verbleibende Unbekannte ist $a$. Diese können wir durch Einsetzen eines Wertepaaren in $q(t)$ und Auflösen nach $a$ bestimmen. Die Nullstellen dürfen nicht als Wertepaare verwendet werden, da $a$ sonst eliminiert wird. Das Wertepaar $(10\,|\,5)$ ist jedoch geeignet:

$$5 = a(10+30)(10-15)(10-60)$$
$$5 = a \cdot 40 \cdot (-5) \cdot (-50)$$
$$5 = 10.000a \qquad | \cdot 0,0001$$
$$\boldsymbol{a = 0,0005}$$

Die Konstanten haben also die Werte $a = 0,0005$, $b = 15$ und $c = 60$.

### 1.3 ► Zahl der Fahrzeuge im Stau (4P)

Gesucht ist die Gesamtzahl der Fahrzeuge im Stau 40 Minuten nach Messbeginn. Gegeben ist dafür die Funktion $q$, die den Fahrzeugfluss, also die Änderungsrate der im Stau stehenden Fahrzeuge pro Minute definiert.

Um von einer momentanen Änderungsrate auf den Bestand nach einer bestimmten Zeit zu schließen, muss die Funktion von Messbeginn bis zum gesuchten Zeitpunkt integriert werden. Daraus erhält man dann die in diesem Zeitraum insgesamt dazugestoßenen Fahrzeuge. Um den Bestand zu erhalten, muss man zu dieser Zahl noch die zu Messbeginn bereits im Stau stehenden Fahrzeuge hinzu addieren.

Wir wollen den Bestand der Fahrzeuge im Stau 40 Minuten nach Messbeginn ermitteln, die Änderungsfunktion muss also über das Intervall

$$[0;40]$$

integriert werden, um die hinzugekommen Fahrzeuge zu erfassen. Hinzu kommen dann die 405 Autos, die bei Messbeginn schon im Stau stehen.

Für den Bestand $B$ gilt damit:

$$B = \int_0^{40} q(t)\,\mathrm{d}t + 405$$

Das Integral lässt sich mit dem GTR bestimmen. Füge dazu den Funktionsterm von $f$ in den `Y=`-Editor ein und wechsle dann mit `MENU → 1` ins `RUM-MAT`-Menü..
Ermittle dann über den Befehl `F4 → F6 → F1` das Integral.


Der GTR liefert

$$\int_0^{40} q(t)\,\mathrm{d}t = -160.$$

Das Integral ist negativ, das bedeutet, dass innerhalb der betrachteten 40 Minuten mehr Fahrzeuge den Stau verlassen, als hinzukommen. Setze das Ergebnis in die Formel für den Bestand ein und ermittle diesen:

$$B = \int_0^{40} q(t)\,\mathrm{d}t + 405 = -160 + 405 = 245$$

40 Minuten nach Messbeginn befinden sich damit noch 245 Fahrzeuge im Stau.