$y = f_a(x) = -x^3 - ax^2 + a^2x + a^3; \quad x \in \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R}^+$

a) ▸ **Ermittlung von Art und Lage der lokalen Extrempunkte von G_a**

Die lokalen Extrempunkte von G_a ermitteln wir mithilfe der ersten beiden Ableitungen von f_a.

$f'_a(x) = -3x^2 - 2ax + a^2;$
$f''_a(x) = -6x - 2a.$

Mögliche Extremstellen ergeben sich nun aus der notwendigen Bedingung $f'_a(x) = 0$:

$$f'_a(x) = -3x^2 - 2ax + a^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$x^2 + \frac{2a}{3}x - \frac{a^2}{3} = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - \left(-\frac{a^2}{3}\right)} = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{(1+3)a^2}{9}} = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{9}}$$
$$= -\frac{a}{3} \pm \frac{2a}{3}.$$

Wir erhalten daraus die beiden Lösungen $x_1 = \frac{a}{3}$ und $x_2 = -a$. Einsetzen in f''_a ergibt:

$$f''_a\left(\frac{a}{3}\right) = -6 \cdot \frac{a}{3} - 2a = -2a - 2a = -4a < 0 \quad (\text{da } a > 0);$$
$$f''_a(-a) = -6 \cdot (-a) - 2a = 6a - 2a = 4a > 0 \quad (\text{da } a > 0).$$

Wir erhalten so ein Maximum an der Stelle $x_1 = a/3$ und ein Minimum an der Stelle $x_2 = -a$. Die y-Koordinaten der zugehörigen Extrempunkte an diesen Stellen lauten:

$$y_1 = f_a(x_1) = -\left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2 \cdot \frac{a}{3} + a^3 = a^3\left(-\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{32}{27}a^3;$$
$$y_2 = f_a(x_2) = -(-a)^3 - a(-a)^2 + a^2(-a) + a^3 = +a^3 - a^3 - a^3 + a^3 = 0.$$

Die Graphen G_a haben also den Hochpunkt $H_a\left(\frac{a}{3}\,\middle|\,\frac{32}{27}a^3\right)$ und den Tiefpunkt $T_a(-a\,|\,0)$.

▸ **Berechnung einer Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte von G_a**

Um die Ortskurve aller Hochpunkte H_a zu bestimmen, schreiben wir zunächst die x-Koordinate sowie die y-Koordinate von H_a getrennt auf, um den Parameter a eliminieren zu können:

$$x = \frac{a}{3}; \quad y = \frac{32}{27}a^3.$$

Wir lösen nun die x-Koordinate nach a auf, was $a = 3x$ ergibt. Dabei ist zu beachten, dass wegen $a > 0$ auch stets $x > 0$ gilt. Setzen wir den Ausdruck nun in die y-Koordinate ein, so ergibt sich:

$$y = \frac{32}{27} \cdot (3x)^3 = \frac{32}{27} \cdot 27x^3 = 32x^3.$$

Die Ortskurve o aller Hochpunkte hat also die Funktionsgleichung $y = 32x^3$ mit $x > 0$.

▸ **Untersuchung des Verhaltens von f_a im Unendlichen**

Bei einer ganzrationalen Funktion wird das Verhalten im Unendlichen immer durch die höchste Potenz bestimmt, hier also durch $-x^3$. Nun gilt:

Für $x \to +\infty$ gilt $-x^3 \to -\infty$, also $f_a(x) \to -\infty$;

Für $x \to -\infty$ gilt $-x^3 \to +\infty$, also $f_a(x) \to +\infty$.

Als Grenzwerte ausgeschrieben ist also $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$.

b) ► **Nachweis, dass $x = 1$ eine Nullstelle der Funktion f_1 ist**

Es gilt $f_1(1) = -1^3 - 1^2 + 1 + 1^3 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$, also ist $x = 1$ Nullstelle.

► **Untersuchung der Funktion f_1 auf weitere Nullstellen**

Um die Polynomfunktion f_1 auf weitere Nullstellen zu untersuchen, teilen wir den Funktionsterm wegen der bekannten Nullstelle $x = 1$ durch $(x-1)$ mithilfe einer Polynomdivision:

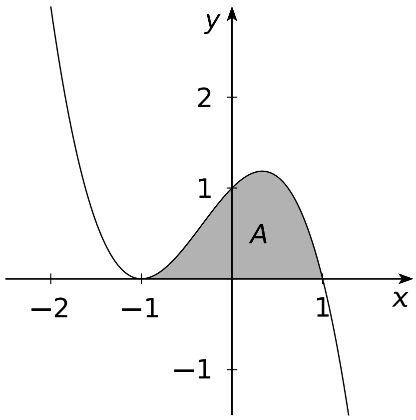
$$\begin{array}{l}
(-x^3 \;\; -x^2 \;\; +x+1) : (x-1) = -x^2 - 2x - 1 \\
\underline{\;\; x^3 \;\; -x^2} \\
\qquad -2x^2 \;\; +x \\
\qquad \underline{\;\; 2x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad -x+1 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; x-1} \\
\qquad\qquad\quad\;\; 0
\end{array}$$

Die weiteren Nullstellen von f_1 ergeben sich also aus der Bedingung $-x^2 - 2x - 1 = 0$. Teilen wir durch -1, so ergibt sich daraus $x^2 + 2x + 1 = 0$, also $(x+1)^2 = 0$. Dies ergibt als Lösung die (doppelte) Nullstelle $x_2 = -1$.

Die Scharfunktion f_1 hat also die beiden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

► **Zeichnung des Graphen G_1 im Intervall $-2 \leq x \leq 1{,}5$**

Der nebenstehende Graph G_1 ergibt sich aus den bisherigen Funktionsuntersuchung: G_1 hat den Tiefpunkt $T(-1\,|\,0)$, näherungsweise den Hochpunkt $H\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{32}{27}\right) \approx H(0{,}33\,|\,1{,}19)$ und die beiden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. x_2 ist dabei eine doppelte Nullstelle, hier berührt G_1 die x-Achse also.



► **Berechnung des Inhalts der eingeschlossenen Fläche**

Wie wir an der Zeichnung des Graphen G_1 erkennen, entspricht die eingeschlossene Fläche der Fläche unterhalb des Graphen G_1 zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = 1$, nämlich den Nullstellen. Für den Inhalt A dieser Fläche gilt damit:

$$A = \int_{-1}^{1} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\right) - \left(-\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 - 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Die Fläche besitzt einen Inhalt von $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$ FE.

c) ▶ **Nachweis der Gleichung für die Zielfunktion**

Anhand der gegebenen Zeichnung erkennen wir im Querschnitt, dass mit der gegebenen Länge x die Höhe des Kreiskegels $h = x + 1$ ist. Den Radius r des Grundkreises erhalten wir mit dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck an der linken Unterseite. Hier gilt:

$r^2 + x^2 = 1^2$, also $r = \sqrt{1^2 - x^2} = \sqrt{-x^2 + 1}$.

Für das Volumen V der Kreiskegel gilt nun:

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (-x^2 + 1) \cdot (x + 1) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-x^3 - x^2 + x + 1) = \frac{1}{3}\pi \cdot f_1(x).$$

Damit ist die Gleichung für die Zielfunktion V nachgewiesen. Als Definitionsbereich kommen alle sinnvollen Längen x für die Kreiskegel in Frage. Die kleinste Länge ist $x = 0$, weiterhin muss x stets unterhalb von 1 liegen, damit die Kreiskegel existieren (für $x = 1$ ist nämlich $f_1(x) = 0$ und damit $V(x) = 0$). Der Definitionsbereich ist daher $D_V = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x < 1\}$.

▶ **Angabe der Höhe des Kreiskegels bei maximalem Volumen**

Die Volumenfunktion V wird maximal, wenn $f_1(x)$ maximal ist. Da f_1 der Funktionenschar f_a für $a = 1$ angehört, ist dies nach Teilaufgabe a für $x = 1/3$ der Fall.

Für die Höhe h gilt dann:

$$h_{\max} = 1 + x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$