

Bei der Aufzucht von Rindern unterscheidet man zwischen Neugeborenen (N), einjährigen Kälbern (K) und geschlechtsreifen erwachsenen Tieren (E), den Kühen und Bullen (mindestens zweijährig). Um eine Rinderherde wirtschaftlich erfolgreich zu betreiben, muss man Kenntnisse über die Anzahl der Geburten, der Todesfälle und der Entnahmen durch Schlachtung oder Verkauf haben. Zudem muss die Verteilung der Herde in den drei Altersstufen (N, K, E) bekannt sein.

In der hier betrachteten Rinderherde werden die Übergänge zwischen den Altersstufen innerhalb eines Jahres durch die folgende Matrix A angegeben:

$$\begin{array}{l} \text{von: } N \quad K \quad E \\ \text{nach: } K \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

- a) Stellen Sie die Entwicklung der Rinderherde durch einen Übergangsgraphen dar. (12P)
Beschreiben Sie die biologische Bedeutung des Matrixelementes $a_{13} = 0,4$ und bestimmen Sie den Anteil der erwachsenen Tiere (E), die nach einem Jahr in der Rinderherde verblieben sind, sowie den Anteil der Neugeborenen, die das Erwachsenenstadium erreichen.
- b) Zurzeit befinden sich 40 Neugeborene, 150 Kälber und 100 Erwachsene in der Herde. (10P)
Berechnen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen in der Herde für das nächste und das übernächste Jahr.
Bestimmen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen für das vergangene Jahr.
- c) Untersuchen Sie, ob es bei den in der Matrix A gegebenen Übergangsverhältnissen eine (10P)
Verteilung auf die Altersstufen in der Rinderherde gibt, die sich im Folgejahr wiederholt.
- d) Durch eine Krankheit überleben in einem Jahr nur 50% der Neugeborenen. Dadurch (6P)
verändert sich in diesem Jahr die Übergangsmatrix

$$\text{zu } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Verteilung in der Herde nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr, ausgehend von der Anfangsverteilung im Aufgabenteil b).

- e) Bestimmen Sie die Matrix $C = A \cdot B$ und beschreiben Sie exemplarisch, wie man auf die (12P)
Matrixelemente der neuen Matrix C kommt.
Interpretieren Sie die Komponenten von C im Sachzusammenhang.
Begründen Sie rechnerisch, dass es relevant ist, ob die Krankheit im ersten oder im zweiten Jahr auftritt.