a) **Einträge der Matrix beschreiben**

Zunächst wollen wir uns noch einmal in Erinnerung rufen, wie eine Übergangsmatrix aufgebaut ist:
Die **Zeilenzahl** gibt uns an, **wohin** sich etwas entwickelt, die **Spaltenzahl** gibt an, **von wo** sich etwas entwickelt.
Ein Eintrag in Spalte 2, Zeile 1 beschreibt also eine Entwicklung aus Stadium 2 nach Stadium 1.

*Beschreibung der ersten Zeile*

$0,4$: 40% der Patienten des ersten Stadiums bleiben im ersten Stadium.

$0,3$: 30% der Patienten des zweiten Stadiums kommen zurück ins erste Stadium.

$0,1$: 10% der Patienten des dritten Stadiums kommen zurück ins erste Stadium.

*Beschreibung der zweiten Zeile*

$0,4$: 40% der Patienten der ersten Stadiums kommen ins zweite Stadium.

$0,2$: 20% der Patienten des zweiten Stadiums bleiben im zweiten Stadium.

$0,2$: 20% der Patienten des dritten Stadiums kommen zurück ins zweite Stadium.

$0,1$: 10% der Patienten des vierten Stadiums kommen zurück ins zweite Stadium.

*Beschreibung der dritten Zeile*

$0,2$: 20% der Patienten des ersten Stadiums kommen ins dritte Stadium.

$0,4$: 40% der Patienten des zweiten Stadiums kommen ins dritte Stadium.

$0,3$: 30% der Patienten des dritten Stadiums bleiben im dritten Stadium.

$0,3$: 30% der Patienten des vierten Stadiums kommen zurück ins dritte Stadium.

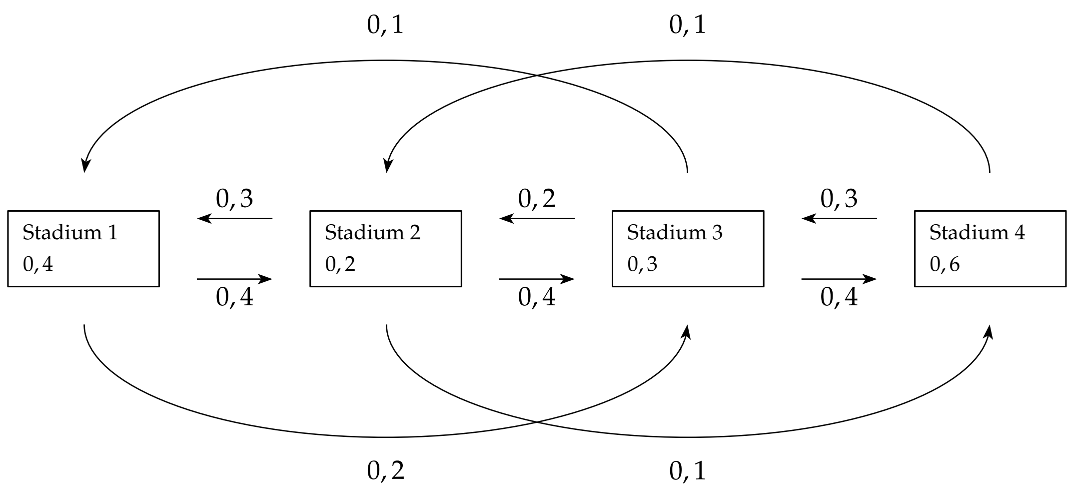
*Beschreibung der vierten Zeile*

$0,1$: 10% der Patienten des zweiten Stadiums kommen ins vierte Stadium.

$0,4$: 40% der Patienten des dritten Stadiums kommen ins vierte Stadium.

$0,6$: 60% der Patienten des vierten Stadiums bleiben im vierten Stadium.

**Übergangsgraphen zeichnen**



b) **Verteilungen der nächsten Jahre bestimmen**

Die genauen Verteilungen werden immer in einem Vektor $\overrightarrow{v}$ angegeben. In unserem Fall hat der Vektor die Form $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \text{Patienten}_{\text{Stadium 1}} \\ \text{Patienten}_{\text{Stadium 2}} \\ \text{Patienten}_{\text{Stadium 3}} \\ \text{Patienten}_{\text{Stadium 4}} \end{pmatrix}$.

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich folgende Anfangsverteilung:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

*Verteilung $\overrightarrow{v}_{2001}$ bestimmen*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}_{2001} &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 200 + 0,3 \cdot 120 + 0,1 \cdot 60 \\ 0,4 \cdot 200 + 0,2 \cdot 120 + 0,2 \cdot 60 + 0,1 \cdot 50 \\ 0,2 \cdot 200 + 0,4 \cdot 120 + 0,3 \cdot 60 + 0,3 \cdot 50 \\ 0,1 \cdot 120 + 0,4 \cdot 60 + 0,6 \cdot 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 121 \\ 121 \\ 66 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

*Verteilung $\overrightarrow{v}_{2002}$ bestimmen*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}_{2002} &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 122 \\ 121 \\ 121 \\ 66 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 122 + 0,3 \cdot 121 + 0,1 \cdot 121 \\ 0,4 \cdot 122 + 0,2 \cdot 121 + 0,2 \cdot 121 + 0,1 \cdot 66 \\ 0,2 \cdot 122 + 0,4 \cdot 121 + 0,3 \cdot 121 + 0,3 \cdot 66 \\ 0,1 \cdot 121 + 0,4 \cdot 121 + 0,6 \cdot 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97,2 \\ 103,8 \\ 128,9 \\ 100,1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

*Verteilung $\overrightarrow{v}_{2003}$ bestimmen*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}_{2003} &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 97,2 \\ 103,8 \\ 128,9 \\ 100,1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 97,2 + 0,3 \cdot 103,8 + 0,1 \cdot 128,9 \\ 0,4 \cdot 97,2 + 0,2 \cdot 103,8 + 0,2 \cdot 128,9 + 0,1 \cdot 100,1 \\ 0,2 \cdot 97,2 + 0,4 \cdot 103,8 + 0,3 \cdot 128,9 + 0,3 \cdot 100,1 \\ 0,1 \cdot 103,8 + 0,4 \cdot 128,9 + 0,6 \cdot 100,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,91 \\ 95,43 \\ 129,66 \\ 122 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

*Verteilung $\overrightarrow{v}_{2004}$ bestimmen*

$$\overrightarrow{v}_{2004} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 82,91 \\ 95,43 \\ 129,66 \\ 122 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 82,91 + 0,3 \cdot 95,43 + 0,1 \cdot 129,66 \\ 0,4 \cdot 82,91 + 0,2 \cdot 95,43 + 0,2 \cdot 129,66 + 0,1 \cdot 122 \\ 0,2 \cdot 82,91 + 0,4 \cdot 95,43 + 0,3 \cdot 129,66 + 0,3 \cdot 122 \\ 0,1 \cdot 95,43 + 0,4 \cdot 129,66 + 0,6 \cdot 122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74,759 \\ 90,382 \\ 130,252 \\ 134,607 \end{pmatrix}$$

**Beurteilung der Erfolgschancen**

Es fällt auf, dass der Anteil der „trockenen" Patienten, d.h. der Anteil an Patienten, die nichts mehr trinken, stark zunimmt, während der Anteil der „starken Trinker" zurückgeht. Die Therapie scheint also gute Erfolgschancen mit sich zu bringen.

c) Wir wissen, dass die Spaltennummer angibt, von wo sich etwas entwickelt. In diesem Modell wird eine begrenzte Anzahl von Patienten beobachtet. Jeder dieser Patienten taucht im Jahr darauf wieder in der Statistik auf, entweder in der gleichen Kategorie oder in einer anderen.
Die Spaltensummen sind deshalb 1, weil ja 100% der Patienten auf die vier Kategorien „verteilt" werden, z.B. Spalte 1: 40% bleiben im Stadium 1, 40% kommen ins zweite Stadium und 20% ins dritte.

Wären die Spaltensummen kleiner als 1, so würden nicht alle Patienten auf die Kategorien verteilt werden, sondern nur ein bestimmter Prozentsatz der Patienten, die übrigen würden aus der Statistik fallen.
Dies würde in unserem Fall bedeuten, dass ein Patient die Klinik verlassen hat oder gestorben ist. Wäre die Summe in Spalte 1 z.B. $0,9$, so würden nicht 100%, sondern nur 90% der Patienten aus Stadium 1 weiter verteilt werden. Die restlichen 10% würden aus der Statistik verschwinden.

Die langfristige Folge wäre natürlich, dass die Anzahl der Patienten immer kleiner wird und irgendwann gegen 0 gehen würde.

d) **Anfangsverteilung bestimmen**

Wir wollen die Anfangsverteilung mit dem Vektor $\overrightarrow{v}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ darstellen. Dieser muss mit der Matrix $M$ multipliziert die Verteilung ergeben, die in der Aufgabenstellung genannt wurde:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also:

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,4v_1 + 0,3v_2 + 0,1v_3 \\ 0,4v_1 + 0,2v_2 + 0,2v_3 + 0,1v_4 \\ 0,2v_1 + 0,4v_2 + 0,3v_3 + 0,3v_4 \\ 0,1v_2 + 0,4v_3 + 0,6v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{I} & 0,4v_1 & +\ 0,3v_2 & +\ 0,1v_3 & & = & 14 \\
\text{II} & 0,4v_1 & +\ 0,2v_2 & +\ 0,2v_3 & +\ 0,1v_4 & = & 13 \\
\text{III} & 0,2v_1 & +\ 0,4v_2 & +\ 0,3v_3 & +\ 0,3v_4 & = & 15 \\
\text{IV} & & 0,1v_2 & +\ 0,4v_3 & +\ 0,6v_4 & = & 8 \\
\hline
\text{I} & 4v_1 & +\ 3v_2 & +\ v_3 & & = & 140 \quad \vert\ (\cdot 10) \\
\text{II} & 4v_1 & +\ 2v_2 & +\ 2v_3 & +\ v_4 & = & 130 \quad \vert\ (\cdot 10) \\
\text{III} & 2v_1 & +\ 4v_2 & +\ 3v_3 & +\ 3v_4 & = & 150 \quad \vert\ (\cdot 10) \\
\text{IV} & & v_2 & +\ 4v_3 & +\ 6v_4 & = & 80 \quad \vert\ (\cdot 10) \\
\hline
\text{I} & 4v_1 & +\ 3v_2 & +\ v_3 & & = & 140 \\
\text{IIa} & & v_2 & -\ v_3 & -\ v_4 & = & 10 \quad \vert\ (\text{I} - \text{II}) \\
\text{IIIa} & - & 5v_2 & -\ 5v_3 & -\ 6v_4 & = & -160 \quad \vert\ (\text{I} - 2 \cdot \text{III}) \\
\text{IV} & & v_2 & +\ 4v_3 & +\ 6v_4 & = & 80 \\
\hline
\text{I} & 4v_1 & +\ 3v_2 & +\ v_3 & & = & 140 \\
\text{IIa} & & v_2 & -\ v_3 & -\ v_4 & = & 10 \\
\text{IIIb} & & & -\ 10v_3 & -\ 11v_4 & = & -110 \quad \vert\ (5 \cdot \text{IIa} + \text{IIIa}) \\
\text{IVa} & & & -\ 5v_3 & -\ 7v_4 & = & -70 \quad \vert\ (\text{IIa} - \text{IV}) \\
\hline
\text{I} & 4v_1 & +\ 3v_2 & +\ v_3 & & = & 140 \\
\text{IIa} & & v_2 & -\ v_3 & -\ v_4 & = & 10 \\
\text{IIIb} & & & -\ 10v_3 & -\ 11v_4 & = & -110 \\
\text{IVb} & & & & 3v_4 & = & 30 \quad \vert\ (\text{IIIb} - 2 \cdot \text{IVa}) \\
\hline
\end{array}$$

Aus IVb folgt: $v_4 = 10$. Dieser Wert eingesetzt in IIIb ergibt:
$-10v_3 - 11 \cdot 10 = -110 \iff v_3 = 0$

$v_3 = 0$ und $v_4 = 10$ eingesetzt in IIa ergibt:
$v_2 - 10 = 10 \iff v_2 = 20$

$v_2 = 20$, $v_3 = 0$ und $v_4 = 10$ eingesetzt in I ergibt:
$4v_1 + 3 \cdot 20 = 140 \iff v_1 = 20$

Daraus folgt der Vektor $\overrightarrow{v}' = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

Die Verteilung muss ein Jahr zuvor also so ausgesehen haben:

20 Patienten im 1. Stadium, 20 im 2. Stadium und 10 Patienten im 4. Stadium.