a) (1) **► Überprüfen des Graphen von f auf Symmetrie** (9BE)

Für $t = 3$ ergibt sich dieser Funktionsterm der Funktion f_3:

$$f_3(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(9 \cdot x - x^3\right)$$

Der Graph von f kann punktsymmetrisch zum Ursprung, achsensymmetrisch zur y - Achse oder keins von beidem sein. Ist f punktsymmetrisch zum Ursprung, dann gilt für ein negatives x:

- $f(-x) = -f(x)$

Ist f hingegen achsensymmetrisch zur y - Achse, so gilt für ein negatives x:

- $f(-x) = f(x)$

Setze also $(-x)$ in den Funktionsterm von f ein und untersuche so die Symmetrie des Graphen von f.

(2) **► Untersuchen des Graphen von f_3 auf lokale Extrempunkte**

Lokale Extremstellen befinden sich da, wo die erste Ableitung der betrachteten Funktion Nullstellen besitzt. Dabei gibt es zwei Arten von Extremstellen:

- Minimalstellen
- Maximalstellen

Die Art der Extremstelle wird dabei über die zweite Ableitungsfunktion festgestellt. Gilt für eine Beispiel - Extremstelle bei x_E

- $f_3''(x_E) > 0 \Longrightarrow$ Bei x_E befindet sich ein Minimum.
- $f_3''(x_E) < 0 \Longrightarrow$ Bei x_E befindet sich ein Maximum.

Gehe also beim Bestimmen der lokalen Extremstellen so vor:

1. Schritt: Bestimmen der ersten und zweiten Ableitung von f_3.
2. Schritt: Bestimmen der Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f_3'.
3. Schritt: Feststellen der Art der ermittelten Extremstellen.
4. Schritt: Berechnen der y - Koordinaten der ermittelten Extremstellen.

(3) **► Untersuchen des Graphen von f_3 auf Wendepunkte**

Wendestellen befinden sich da, wo die erste Ableitung der betrachteten Funktion Extremstellen besitzt. Für eine Wendestelle x_W muss gelten:

- Notwendige Bedingung: $f_3''(x_W) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f_3'''(x_W) \neq 0$

Gehe also beim Bestimmen der lokalen Extrempunkte des Graphen von f so vor:

1. Schritt: Bestimmen der dritten Ableitungsfunktion von f_3.
2. Schritt: Bestimmen der Nullstellen der zweiten Ableitungsfunktion f_3''.
3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung an den ermittelten Wendestellen.
4. Schritt: Berechnen der y - Koordinaten der Wendestellen.

(4) ▶ **Angeben einer Gleichung, die den Graphen aus der Aufgabenstellung beschreibt**

Bevor du damit anfängst diese Aufgabe zu lösen, solltest du dir klar gemacht haben, was das Verschieben eines Graphen bedeutet:

Wird ein Graph in Richtung der x - Achse verschoben, wo wird jedes x in dessen Funktionsterm um einen konstanten Wert vergrößert oder verringert. Wird jedes x im Funktionsterm eines Graphen um einen konstanten Wert verringert, so verschiebt sich der Graph der jeweiligen Funktion nach rechts, wird jedes x hingegen um einen konstanten Wert vergrößert, so verschiebt er sich nach links.
Wird eine Beispielfunktion g nun um einen konstanten Wert c nach rechts verschoben, bedeutet das für den Funktionsterm von g:
$g_c(x) = g(x - c)$ mit $c > 0$.

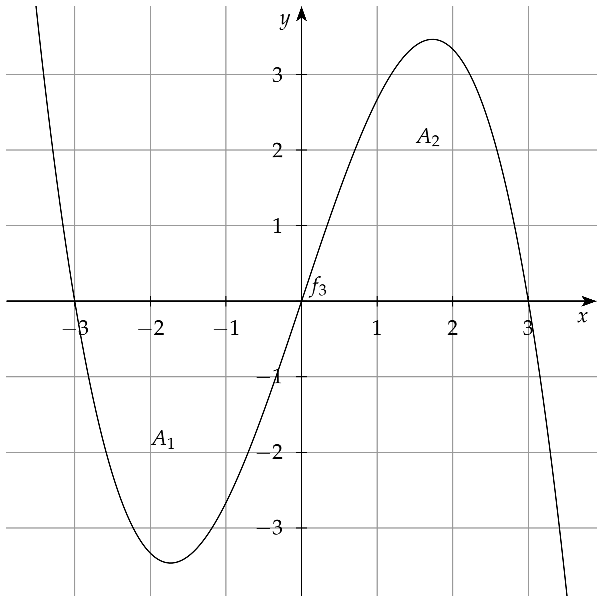
Wird ein Graph dagegen in Richtung der y - Achse verschoben, wo wird dessen Funktionsterm um einen konstanten Wert vergrößert oder verringert. Wird der Funktionsterm dabei um einen konstanten Wert vergrößert, so verschiebt sich der Graph der betrachteten Funktion in positiver y - Richtung. Wird Funktionsterm hingegen um einen konstanten Wert verringert, so verschiebt sich der Graph der betrachteten Funktion in negativer y - Richtung.
Wird eine Beispielfunktion g nun um einen konstanten Wert c in positiver y - Richtung verschoben, bedeutet das für den Funktionsterm von g:
$g_c(x) = g(x) + c$ mit $c > 0$.

Deine Aufgabe ist es hier, den Graphen von f_3 so zu verschieben, dass ein Extrempunkt von f_3 auf der x - Achse, ein Extrempunkt von f_3 auf der y - Achse und der Wendepunkt von f_3 im IV. Quadranten liegt.

b) (1) **► Berechnen des gesuchten Wertes für t** (5BE)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph von f_t mit der x - Achse zwei Flächen vollständig begrenzt. Deine Aufgabe ist es hier t nun so anzupassen, dass der Gesamtflächeninhalt, also die Summe der Inhalte der zwei von f_t begrenzten Teilflächen, insgesamt 864 FE beträgt.

Bei dieser Aufgabe empfiehlt es sich eine Skizze des Sachverhalts anzufertigen. Rechts ist beispielsweise der Graph der Funktion f_3 skizziert.



Wie du die Skizze entnehmen kannst, wird Teilfläche mit dem Flächeninhalt A_1 durch die Schnittstelle von f mit der x - Achse in negativer x - Richtung und durch den Schnittpunkt des Graphen von f mit der x - Achse bei $x = 0$ beschränkt.

Teilfläche A_2 hingegen, wird durch die Schnittstelle von f mit der x - Achse in positiver x - Richtung und ebenfalls durch den Schnittpunkt des Graphen von f mit der x - Achse bei $x = 0$ beschränkt.

Bevor du also t so anpassen kannst, dass der gesamt von f_t begrenzte Flächeninhalt 864 FE beträgt, berechnest du zuerst die Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t. Hast du die Nullstellen ermittelt, so bildest du die zu den Teilflächen A_1 und A_2 zugehörigen Integrale in Abhängigkeit von t. Hast du diese Integrale aufgestellt, so addierst du deren Terme und setzt den resultierenden Term gleich 864. Löst du die Gleichung nun nach t auf, so hast du diese Aufgabe gelöst.

(2) **► Ermitteln der Anzahl der Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t**

Bevor du ermitteln kannst, wie viele Extremstellen f_t in Abhängigkeit von t besitzt, bestimmst du die Extremstellen der Scharfunktion f_t in Abhängigkeit von t. Extremstellen befinden sich da, wo die erste Ableitung der betrachteten Funktion Nullstellen besitzt. An einer Extremstelle x_E müssen diese zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Notwendige Bedingung: $f_t'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_t''(x_E) \neq 0$.

Gehe beim Bestimmen der Extremstellen von f_t also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der ersten und zweiten Ableitung von f_t.
2. Schritt: Bestimmen der Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion von f_t.
3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung an den in 3. ermittelten Stellen.

Hast du die Extremstellen von f_t bestimmt, so untersuchst du den Einfluss des Parameters t auf die Anzahl der Extremstellen von f_t:

- 4. Schritt: Untersuchen des Einflusses von t auf die Anzahl der Extremstellen von f_t.

(3) **► Angeben der Auswirkung der Änderung des Funktionsterm von f_t auf die Extrema**

Willst du Überprüfen, wie sich die Änderung des Funktionsterms von f_t auf die Anzahl der Extremstellen von f_t auswirkt, so bestimmst du die wie oben zuerst die Extremstellen von g_t in Abhängigkeit. Betrachtet wird dabei g_t mit folgendem Funktionsterm:
$g_t(x) = \frac{1}{t} \cdot \left(t^3 \cdot x - x^3\right)$.
Gehe beim Bestimmen der Extremstellen von g_t wieder so vor:

1. Schritt: Bestimmen der ersten und zweiten Ableitung von g_t.
2. Schritt: Bestimmen der Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion von g_t.
3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung an den in 3. ermittelten Stellen.

Hast du die Extremstellen von g_t bestimmt, so untersuchst du wieder den Einfluss des Parameters t auf die Anzahl der Extremstellen von g_t:

- 4. Schritt: Untersuchen des Einflusses von t auf die Anzahl der Extremstellen von g_t.

c) **► Annähern des Graphen von f_3 im Intervall $[0;3]$ durch eine quadratische Funktion** (4BE)

Beim Lösen dieser Aufgabe gibt es mehrere Möglichkeiten. Im Folgenden werden zwei davon vorgestellt.

►► Lösungsweg A: Satz von Vieta

Aus den vorhergegangenen Aufgabenteilen ist dir bekannt, dass f_3 im Intervall $[0;3]$ diese Eigenschaften besitzt:

- Hochpunkt bei $H\left(\sqrt{3} \mid 2 \cdot \sqrt{3}\right)$.
- Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

Möchte man nun die quadratische Funktion bzw. die Parabel nun so modellieren, dass deren Graph durch die Nullstellen von f_3 im betrachteten Intervall verläuft und der Scheitel die gleiche y - Koordinate wie der Hochpunkt des Graphen von f_3 besitzt, so lässt sich folgender Ansatz verwenden, um den Funktionsterm der Annäherungsfunktion h_1 aufzustellen:
$h_1(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ (Satz von Vieta).

►► Lösungsweg B: Lineares Gleichungssystem

Die Normalform einer quadratischen Funktion zweiten Grades ist:
$h_2(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Bestimme die Parameter $a,\ b$ und c über ein lineares Gleichungssystem. Um die Koeffizienten $a,\ b$ und c zu bestimmen, bedarf es hier einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen. Diese drei Gleichungen ergeben sich dabei aus drei Punkten, welche auf dem Graphen von f_3 im betrachteten Intervall liegen.

►► Lösungsweg C: Scheitelpunktform

Die Gleichung der gesuchten quadratischen Annäherungsfunktion kann ebenfalls über die Scheitelpunktform einer Parabel ermittelt werden. Diese ist:

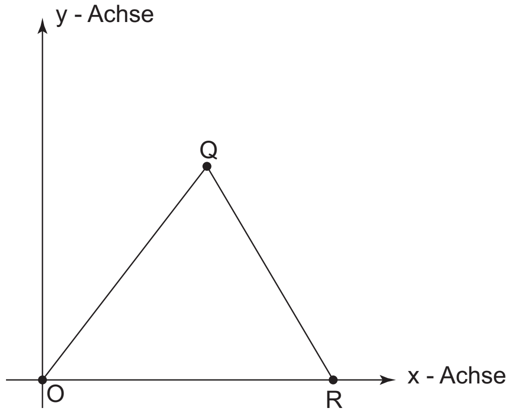
$h_3(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S.$

Dabei entspricht x_S der x - Koordinaten des Scheitels S der Parabel und y_S der jeweiligen y - Koordinaten.

d) **► Untersuchen, ob die Seiten jeweils Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sein können** (4BE)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Punkt $R\,(3 \mid 0)$, Punkt $Q\,(q \mid f_3(q))$ und der Koordinatenursprung O ein Dreieck ORQ bilden. Deine Aufgabe ist es hier, zu untersuchen, ob die Seiten $\overline{OR}$, $\overline{QR}$ bzw. $\overline{OQ}$ jeweils eine Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sein könnten.

Ist ein Dreieck gleichschenklig so besitzt dieses zwei Seiten mit gleicher Länge.
Skizze:



Folgende Seiten könnten also eine Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ORQ sein:
$\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ und $\overline{RQ}$.

Überprüfe nun, ob es jeweils ein q mit $q \in (0;3)$ bzw. einen Punkt auf dem Graphen von f_3 gibt, so dass die verschiedenen Seiten eine Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ORQ sein könnten.
Verwende dazu folgende Abstandsformel:

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$

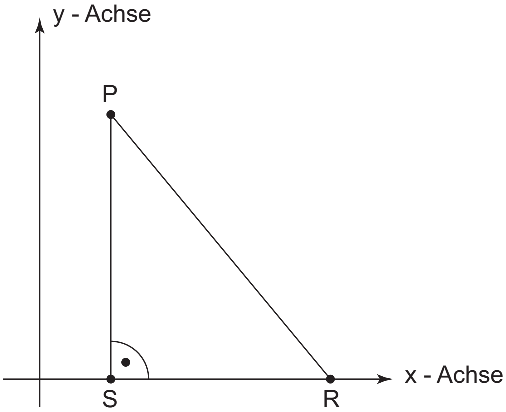
e) **► Berechnen von p so, dass der Flächeninhalt von PSR maximal wird** (4BE)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Punkte $P(p \mid f_3(p))$, $S(p \mid 0)$ und $R(3 \mid 0)$ mit $p \in (0;3)$ das Dreieck PSR bilden. Dabei ist es deine Aufgabe, Stelle p so zu bestimmen, dass der Flächeninhalt A_{PSR} des Dreiecks PSR maximal wird.

Bevor du damit anfängst diese Aufgabe zu lösen, solltest du dir klar gemacht haben, wie sich der Flächeninhalt A_{PSR} des Dreiecks PSR zusammensetzt. Betrachte dazu die Eckpunkte des Dreiecks PSR einzeln und im Sachzusammenhang:

- $R(3 \mid 0)$: Liegt auf der x - Achse bei $x = 3$.
- $S(p \mid 0)$: Liegt auf der x - Achse bei $x = p$ und bildet mit R eine Kathete des Dreiecks PSR.
- $P(p \mid f_3(p))$: Liegt oberhalb von S auf dem Graphen von f_3 und bildet mit S die andere Kathete des Dreiecks PSR.

Skizze:



Wie du der Skizze entnehmen kannst, ist das Dreieck PSR rechtwinklig. Der Flächeninhalt A_{PSR} berechnet sich also über die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks. In Abhängigkeit von p, über diese Formel:

$A_{PSR}(p) = \frac{1}{2} \cdot (3 - p) \cdot f_3(p),$

wobei $3 - p$ jeweils den Abstand des Punktes S zum Punkt R beschreibt.

Willst du nun $p \in (0;3)$ so bestimmen, dass A_{PSR} maximal wird, bestimmst du die Maximalstelle der Flächeninhaltsfunktion A_{PSR}.
Gehe dabei so vor:

1. Schritt: Bilden der ersten und zweiten Ableitung von A_{PSR}.
2. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitung.
3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung.

f) (1) ▶ **Bestimmen der Gleichungen der Tangenten** (5BE)

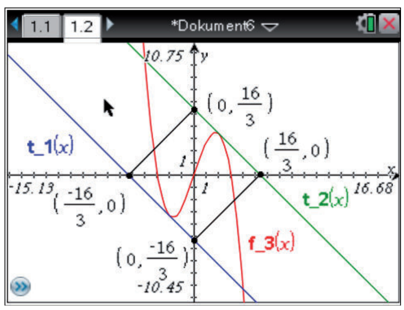
Deine Aufgabe ist es hier, die Gleichungen jener Tangenten an den Graphen von f_3 zu bestimmen, welche eine Steigung von -1 besitzen. Die Steigung des Graphen von f_3 wird durch die zugehörige erste Ableitungsfunktion beschrieben.

Bevor du also die gesuchten Tangentengleichungen bestimmen kannst, ermittelst du jene Stellen des Graphen von f_3, in denen eine Steigung von -1 vorliegt. Setze dazu den Funktionsterm der ersten Ableitungsfunktion von f_3 gleich -1.

Hast du die gesuchten Stellen bestimmt, so ermittelst du mit deinem CAS die zu den Stellen zugehörigen Tangenten an den Graphen von f_3.

(2) ▶ **Abstand zwischen den Tangenten berechnen**

Tangente t_1 und t_2 haben beide eine Steigung von -1, das heißt, sie verlaufen parallel zueinander und besitzen daher keinen Schnittpunkt. Verlaufen Geraden parallel zueinander, so besitzen diese für jedes gemeinsames $x \in \mathbb{R}$ den gleichen Abstand.
Hier kann es hilfreich, wenn du dir den Sachverhalt im Graphs - Modus deines CAS anzeigen lässt.



Wie du dem Schaubild oben entnehmen kannst, sind die Schnittpunkte der Tangenten mit den Achsen gleich weit vom Ursprung entfernt (Entfernung: $\frac{16}{3}$). Diese Schnittpunkte bilden dadurch mit den Koordinatenachsen ein Quadrat.

Der Abstand d der beiden Tangenten kann deshalb über die Seitenlänge einer Seite dieses Quadrats berechnet werden.

(3) **► Anzahl der Tangenten an den Graphen von f_3 in Abhängigkeit vom Anstieg m**

Deine Aufgabe ist es hier, die Anzahl der Tangenten an den Graphen von f_3 in Abhängigkeit der Steigung m der Tangenten anzugeben. Die Steigung m der Tangenten entspricht dabei jeweils dem Funktionswert der erste Ableitung f_3' an der betrachteten Stelle.

Willst du nun die Anzahl der Tangenten in Abhängigkeit derer Steigung m bestimmen, betrachtetest du die erste Ableitungsfunktion f_3' von f_3, wobei folgender Zusammenhang gilt:

$f_3'(x) = 3 - x^2 = m.$

Stellst du die obige Gleichung nun nach x um, so sieht diese so aus:

$|x| = \sqrt{3-m}$

Variable x beschreibt dabei den Wert bzw. die Werte möglicher Berührstellen von Tangenten mit dem Graphen von f_3 in Abhängigkeit vom Anstieg m.