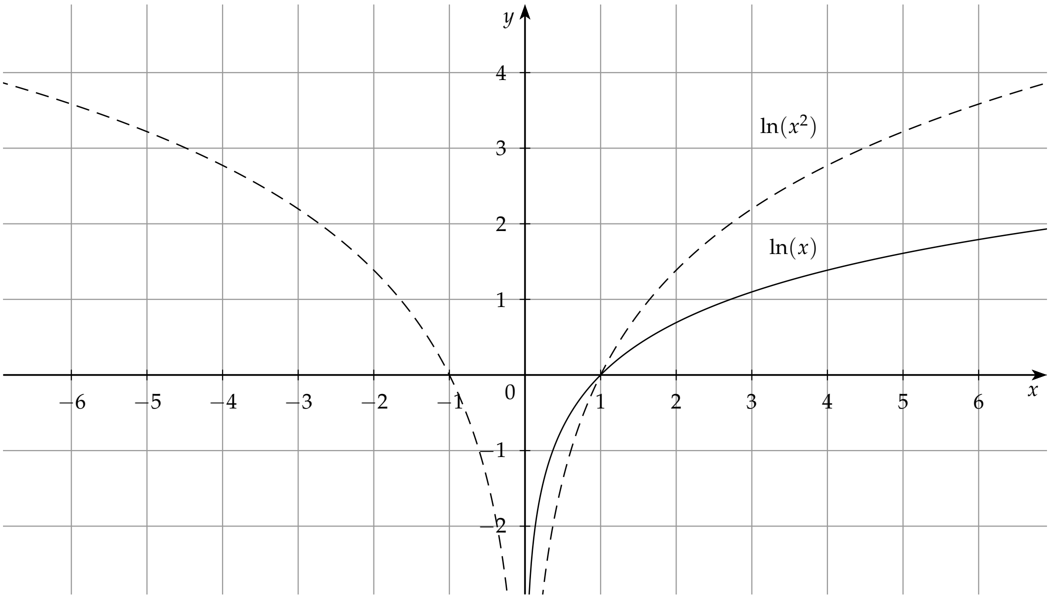
1.1 ► Graphen von $\ln(x)$ und $\ln(x^2)$ skizzieren und Veränderungen beschreiben und begründen (5P)

Skizziere die Graphen von $\ln(x)$ und $\ln(x^2)$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Achte darauf, dass beide Kurven die x-Achse in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Du kannst zwei Wertetabellen erstellen und anhand dieser die Funktionsgraphen zeichnen:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\ln(x)$	–	–	–	–	0	$0,7$	$1,1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\ln(x^2)$	$2,2$	$1,4$	0	–	0	$1,4$	$2,2$

Hier ist der Graph zu $\ln(x^2)$ gestrichelt dargestellt:



Der natürliche Logarithmus ist für Werte kleiner oder gleich Null nicht definiert. Daher ist $\ln(x)$ für $x \leq 0$ nicht definiert. Das Argument von $\ln(x^2)$ jedoch ist jedoch stets größer oder gleich Null. Diese Funktion ist also lediglich für $x = 0$ nicht definiert, da dann auch x^2 gleich Null wird. Zudem hat $\ln(x^2)$ einen symmetrischen Funktionsgraphen, sodass der Graph im negativen x-Bereich spiegelbildlich zur Kurve im positiven x-Bereich verläuft.

Du kannst also zwei signifikante Veränderungen beobachten, die durch das Quadrat hervorgerufen werden:

1. $\ln(x^2)$ ist auch für $x < 0$ definiert.
2. Der neue Graph verläuft im Positiven für $x < 1$ unter und für $x > 1$ über der Kurve von $\ln(x)$.

Für positive x kleiner 1 gilt $x > x^2$ und für positive x größer als 1 immer $x < x^2$. Daher verläuft die Kurve von $\ln(x^2)$ für positive x zunächst unterhalb und dann oberhalb der Kurve von $\ln(x)$. Dabei gilt nach den Logarithmenregeln

$\ln(x^2) = 2\ln(x)$,

sodass $\ln(x^2)$ für gleiche x-Werte den doppelten Betrag von $\ln(x)$ liefert.

1.2 ▶ Parameterwerte a bestimmen, für die $\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$ definiert ist (2P)

Betrachte die Funktionsgleichung: Hier könnten sowohl die Lage des Parameterwerts im Nenner eines Bruchs als auch der Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus den Definitionsbereich von a einschränken.

Der natürliche Logarithmus ist für Argumente kleiner oder gleich Null nicht definiert. Da x^2 für alle Werte von x größer oder gleich Null ist, ist die Funktion immer dann für alle x außer $x = 0$ definiert, wenn das Argument $\frac{x^2}{a}$ insgesamt definiert und positiv ist. Dies ist für alle $a > 0$ der Fall.

1.3 ▶ Punktsymmetrie zeigen (2P)

Zu zeigen ist: Wenn der Graph einer Funktion g auf ihrem Definitionsbereich achsensymmetrisch ist, so ist der Graph einer Funktion

$h(x) = x \cdot g(x)$

punktsymmetrisch.

Ist der Graph einer Funktion g achsensymmetrisch zur y-Achse, so erfüllt ihr Funktionsterm die Bedingung für Achsensymmetrie:

(1) $\quad g(-x) = g(x)$

Ist der Graph einer Funktion h punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, so erfüllt ihr Funktionsterm die Bedingung für Punktsymmetrie:

(2) $\quad h(-x) = -h(x)$

Setze nun den Funktionsterm von h in die Bedingung für Punktsymmetrie ein und wende dann die Bedingung für Achsensymmetrie auf $g(x)$ an. Es ergibt sich zunächst:

$h(-x) = -x \cdot g(-x)$

Durch Einsetzen von (1) folgt dann:

$h(-x) = -x \cdot g(-x) \overset{(1)}{=} -x \cdot g(x) = -h(x)$

Ein Vergleich des anfänglichen Terms mit dem Ergebnis zeigt: Dies ist gerade die Bedingung (2). Du kannst also sagen, dass der Graph der Funktion h punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

1.4 ▶ Grenzwert untersuchen (3P)

Der Grenzwert

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)$

lässt sich nicht sofort aus dem Term ableiten, da sich hier nicht eindeutig ein Grenzwert ergibt, wenn man die Grenzwerte der einzelnen Faktoren des Produkts bildet:

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0 \quad$ und $\quad \lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty$

Du kannst den Grenzwert allerdings bestimmen, indem du folgende drei Informationen verwendest:

1. Wenn man eine Zahl quadriert, ist das Vorzeichen des Ergebnisses immer positiv. Man kann also uneingeschränkt $x^2 = |x|^2$ setzen.
2. Die Rechenregeln bei Logarithmen lautet: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
3. In der Aufgabenstellung ist der folgende Grenzwert angegeben: $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \ln(|x|)) = 0$

Du kannst nun nacheinander die drei Angaben verwenden, um den Grenzwert zu ermitteln:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) &= \lim_{x\to 0}\left(x \cdot \ln|x|^2\right) && \leftarrow \text{1. Angabe}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(x \cdot \ln(|x| \cdot |x|)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(x \cdot (\ln|x| + \ln|x|)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(x \cdot \ln|x| + x \cdot \ln|x|\right) && \leftarrow \text{2. Angabe}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(x \cdot \ln|x|\right) + \lim_{x\to 0}\left(x \cdot \ln|x|\right)\\
&= 0 + 0 && \leftarrow \text{3. Angabe}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Für den Grenzwert ergibt sich damit: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) = 0.$

2.1 ► Parameterwerte für abgebildete Graphen bestimmen (3P)

Die gesuchten Parameter für die abgebildeten Graphen lassen sich anhand der Nullstellen der zugehörigen Funktionen bestimmen. Betrachte die Funktionsgleichung von f_a für $x \neq 0$:

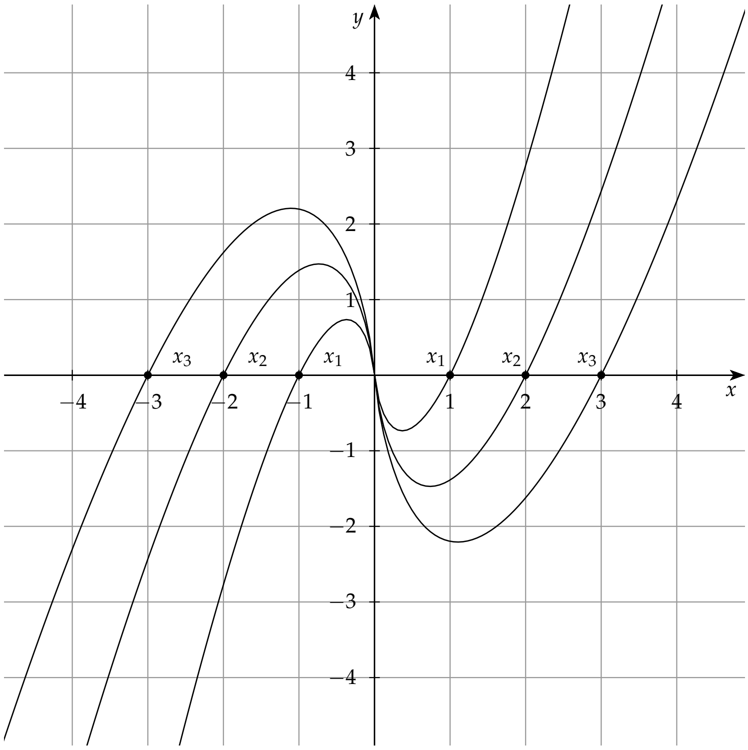
Der Funktionsterm von f_a kann nur dann Null werden, wenn der natürliche Logarithmus Null wird. Der natürliche Logarithmus wird wiederum nur dann Null, wenn sein Argument gleich 1 ist, d.h.: $\ln(1) = 0$. In unserem Fall ist das Argument des Logarithmus gerade „$\frac{x^2}{a}$“. Dieser Ausdruck muss für die die Nullstellen 1 ergeben, d.h.:

$$\frac{x^2}{a} = 1$$

Aufgelöst nach a ergibt sich:

$$a = x^2$$

Nun beobachten wir für jede Kurve zwei Nullstellen, die nicht im Ursprung liegen, jeweils bei $x_1 = \pm 1,\ x_2 = \pm 2$ und $x_3 = \pm 3$:



Für diese ergeben sich dann die Parameter:

$a_1 = (\pm 1)^2 = 1$

$a_2 = (\pm 2)^2 = 4$

$a_3 = (\pm 3)^2 = 9$

Die drei gesuchten Parameter sind damit $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 9$.

2.2 ► Parameter a bestimmen (8P)

Um eine Funktion mit einem Parameter zu bestimmen, wird genau eine Bedingung benötigt. Diese ist hier durch den Punkt $E(1 \mid 1)$ gegeben. Eingesetzt in die Funktionsgleichung von f_a für $x \neq 0$ ergibt sich eine Gleichung mit einer Unbekannten, die sich nach a auflösen lässt.

Die Gleichung lautet demnach:

$$f_a(1) = 1 = 1 \cdot \ln\left(\frac{1^2}{a}\right)$$

Du kannst die Gleichung nun nach a auflösen, indem du die linke und die rechte Seite der Gleichung jeweils zum Exponenten der e-Funktion machst. Dadurch erhältst du einen Term der Form $\mathrm{e}^{\ln(x)}$, der sich zu x vereinfacht. Das funktioniert, weil $\mathrm{e}(x)$ die Umkehrfunktion zu $\ln(x)$ ist:

$$e^1 = e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}$$
$$e = \frac{1}{a}$$
$$a = \frac{1}{e}$$

Der Graph von f_a verläuft also durch E genau dann, wenn der Parameter a den Wert $\frac{1}{e}$ annimmt.

▶ Zeigen, dass durch jeden Punkt nur eine Kurve verläuft

Allgemein gilt: Wenn es nur einen Parameter a gibt, sodass der Graph der zugehörigen Funktion f_a durch einen Punkt $P(p \mid q)$ verläuft, so verläuft genau ein Graph der Schar durch diesen Punkt. Bestimme nun allgemein den Parameter a so, dass der Graph von f_a durch den Punkt P verläuft und zeige durch die Rechnung, dass es nur genau einen solchen Wert a gibt:

Setze auch hier wieder die Koordinaten in die Funktionsgleichung für $x \neq 0$ ein und löse wie zuvor nach a auf. Teile zunächst durch p und wende wieder an, dass $e(x)$ die Umkehrfunktion zu $\ln(x)$ ist:

$$q = p \cdot \ln\left(\frac{p^2}{a}\right) \qquad |: p$$
$$\frac{q}{p} = \ln\left(\frac{p^2}{a}\right) \qquad \text{Umkehrfunktion anwenden}$$
$$e^{\frac{q}{p}} = e^{\ln\left(\frac{p^2}{a}\right)}$$
$$e^{\frac{q}{p}} = \frac{p^2}{a} \qquad |\cdot a \quad |: e^{\frac{q}{p}}$$
$$a = \frac{p^2}{e^{\frac{q}{p}}}$$

Du kannst erkennen: Es existiert nur ein einziger Parameter a, der die Bedingung erfüllt, dass der Graph von f_a durch den Punkt $P(p \mid q)$ verläuft. Dies war zu zeigen.

2.3 **▶ Zeigen, dass der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte besitzt und Ortskurve bestimmen** (10P)

Gesucht sind die Extrempunkte der Graphen der Funktionenschar f_a und die Gleichung der zugehörigen Ortskurve h.

Die notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Extremstelle einer Funktion f_a bei x_E sind:

1. Die erste Ableitung f_a' ist gleich Null: $f_a'(x_E) = 0$.
2. Die zweite Ableitung f_a'' ist ungleich Null: $f_a''(x_E) \neq 0$.

Bilde also zunächst die erste und zweite Ableitungen von f_a, setze die erste Ableitung gleich Null und ermittle mögliche Extremstellen. Prüfe dann mit der hinreichenden Bedingung, ob sie tatsächlich Extremstellen darstellen. Im Anschluss kannst du anhand der Koordinaten der Extrempunkte ein Gleichung der Ortskurven h bestimmen.

1. Schritt: Ableitungen berechnen

Für die erste und zweite Ableitungen ergibt sich mithilfe der Ketten- und der Produktregel im Funktionsterm für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) \\
f_a'(x) &= (x)' \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + x \cdot \left(\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)\right)' && \leftarrow \text{Produktregel} \\
&= 1 \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + x \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{x^2}{a}}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{a}}_{\text{innere Ableitung}} && \leftarrow \text{Kettenregel} \\
&= \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + 2 \\
f_a''(x) &= \underbrace{\frac{1}{\frac{x^2}{a}}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{a}}_{\text{innere Ableitung}} && \leftarrow \text{Kettenregel} \\
&= \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Mögliche Extremstellen bestimmen

Setze nun $f_a'(x) = 0$ und löse nach x auf, um mögliche Extremstellen zu bestimmen. Bringe dazu zunächst den Logarithmus allein auf eine Seite der Gleichung und wende anschließend auf beide Seiten der Gleichung die e-Funktion an, indem du verwendest, dass $\mathrm{e}(x)$ die Umkehrfunktion zu $\ln(x)$ ist:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + 2 &= 0 \\
\ln\left(\frac{x^2}{a}\right) &= -2 \\
\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)} &= \mathrm{e}^{-2} && \mathrm{e}^{\ln(X)} = X \\
\frac{x^2}{a} &= \frac{1}{\mathrm{e}^2} \\
x^2 &= \frac{a}{\mathrm{e}^2} \\
x_{1,2} &= \pm\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

Es ergeben sich zwei Nullstellen der Ableitung und damit zwei mögliche Extremstellen bei $x_1 = \frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}$ und $x_2 = -\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}$.

3. Schritt: Mögliche Extremstellen auf hinreichende Bedingung prüfen

Bilde nun die zweite Ableitung an den beiden Stellen, und prüfe so, ob es sich tatsächlich um Extremstellen handelt. Beachte dabei, dass laut Aufgabenstellung $a > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f_a''(x_1) &= \frac{2}{x_1} = \frac{2}{\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}} = \frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{a}} \neq 0 \\
f_a''(x_2) &= \frac{2}{x_2} = \frac{2}{\frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}}} = -\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{a}} \neq 0
\end{aligned}$$

Es handelt bei bei x_1 und x_2 tatsächlich um Extremstellen. Für die y-Koordinaten der Extrempunkte ergeben sich dann durch Einsetzen in den Funktionsterm von f_a:

$$f_a(x_1) = \frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}\right)^2}{a}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$
$$f_a(x_2) = \frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{\left(\frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}}\right)^2}{a}\right)$$
$$= \frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$

Die zwei Extrempunkte des Graphen von f_a haben also die Koordinaten:

$$E_1\left(\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \,\middle|\, \frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\right) \quad \text{und} \quad E_2\left(\frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \,\middle|\, \frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\right)$$

Jetzt kannst du eine Gleichung der Ortskurven der Extrempunkte bestimmen, indem du zunächst die x-Koordinate eines Extrempunkts nach a auflöst und das Ergebnis anschließend in die y-Koordinate einsetzt. Für E_1 ergibt sich so:

$$x = \frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} = \mathrm{e} \cdot x$$
$$y = \frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e} \cdot x}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$
$$= x \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$
$$= -2x$$

Die Ortskurve für den ersten Extrempunkt hat damit die Funktionsgleichung: $h_1(x) = -2x$. Für die zweite Ortskurve ergibt sich analog:

$$x = \frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} = -\mathrm{e} \cdot x$$
$$y = \frac{-\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e} \cdot x}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$
$$= x \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$
$$= -2x$$

Die Ortskurve für den ersten Extrempunkt hat damit die Funktionsgleichung: $h_2(x) = -2x$.

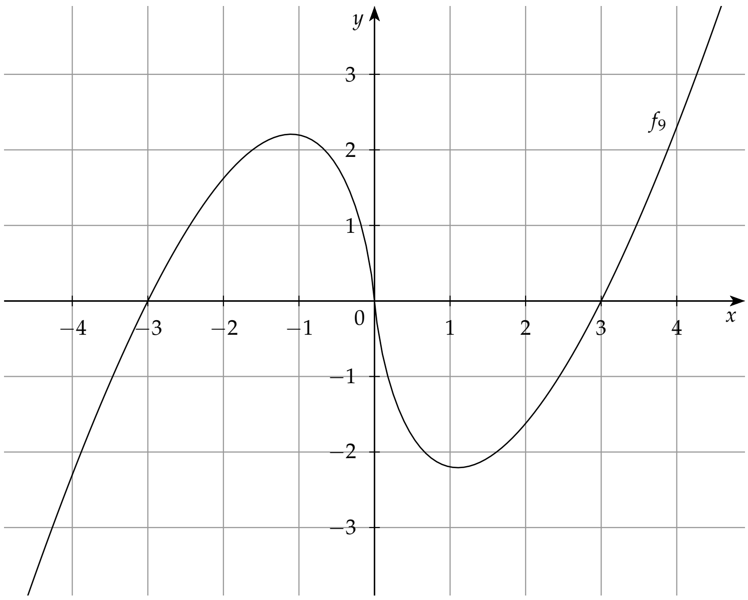
Die Ortskurven beider Extrempunkte ergeben damit zusammen

$h(x) = -2x$

für $x \neq 0$, da der Graph für $x = 0$ keine Extrema aufweist. f_a ist dort definiert als $f_a(x) = 0$.

2.4 ► Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen (7P)

Das Integral über eine Funktion f_a in den Grenzen $[a, b]$ kann als orientierter Flächeninhalt der Fläche interpretiert werden, welche der Graph von f_a mit der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse bei a und b einschließt. Der Graph von f_9 sieht analog zu Material vier wie folgt aus:



Du kannst nun alle Nullstellen von f_9 bestimmen und anschließend abschnittsweise über die Intervalle integrieren, die geschlossene Flächen mit der x-Achse bilden.

1. Schritt: Nullstellen der Funktion bestimmen

Setze zunächst $f_9(x) = 0$ und löse nach x auf:

$$f_9(x) = 0$$

$$- x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{9}\right) = 0 \qquad \text{Satz vom Nullprodukt:}$$

$$\mathbf{x_1 = 0}$$

$$\ln\left(\frac{x^2}{9}\right) = 0$$

$$e^{\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)} = e^0$$

$$\frac{x^2}{9} = 1$$

$$\mathbf{x_{2,3} = \pm 3}$$

Die Funktion f_9 besitzt also drei Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$. Damit ergeben sich zwei geschlossene Flächen, die schon oben in der Skizze zu sehen sind, nämlich in den Intervallen $[-3, 0]$ und $[0, 3]$.

2. Schritt: Inhalte der eingeschlossenen Flächen berechnen

Du kannst nun die Inhalte der beiden eingeschlossenen Flächen bestimmen, indem du die Beträge der Integrale über die beiden Intervalle addierst:

$$
\begin{aligned}
A= & \left|\int_{-3}^{0} f_9(x)\ \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{3} f_9(x)\ \mathrm{d}x\right| \\
= & \left|\int_{-3}^{0} x\cdot\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)\ \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{3} x\cdot\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)\ \mathrm{d}x\right| \\
= & \left|\left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3}\right|
\end{aligned}
$$

Um nun $x = 0$ in den Ergebnisterm einzusetzen, kannst du $\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x^2}{a}\right) = 0$ setzen, da laut Aufgabe 1.4 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln\left(\frac{x^2}{a}\right) = 0$. Das Produkt

$$x\cdot\left(x\cdot\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)\right)$$

hat damit ebenso den Grenzwert 0, da die beiden Faktoren den gleichen Grenzwert besitzen. Insgesamt folgt damit:

$$
\begin{aligned}
A= & \left|\left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3}\right| \\
= & \left|\frac{9}{2}\ln(1)-\frac{9}{2}\right| + \left|\frac{9}{2}\ln(1)-\frac{9}{2}+\right| \\
= & \frac{9}{2}+\frac{9}{2} \\
= & 9
\end{aligned}
$$

Die Fläche, die der Graph von f_9 mit der x-Achse einschließt, hat also den Inhalt 9 FE.