1.1 **► Werte und Funktionsgraphen in Koordinatensystem darstellen**

Einen Wert stellst du in einem Koordinatensystem dar, indem du zuerst den x-Wert abträgst und dann den y-Wert.

Graphen von Funktionen hingegen kannst du mit deinem CAS zeichnen lassen und sie dann anhand einiger Werte wie bereits genannt in das Koordinatensystem übertragen.

Um die Werte darzustellen, musst du zunächst aber die Skalierung des Koordinatensystems anpassen. Dies ist damit zu begründen, dass die Angaben in Tagen in 25 er Schritten von 0 bis 200 laufen.

- Skalierung des Koordinatensystems anpassen
- x- und y-Koordinaten der gegebenen Werte abtragen
- Graphen der Funktion mit CAS zeichnen und anhand einiger Werte übertragen.

1. Schritt: Werte zum Übertragen der Funktion definieren

Um die Werte der Funktion möglichst passend zu den gegebenen Werte zu erhalten, verwenden wir auch eine Wertetabelle, die in 25 er Schritten skaliert ist.

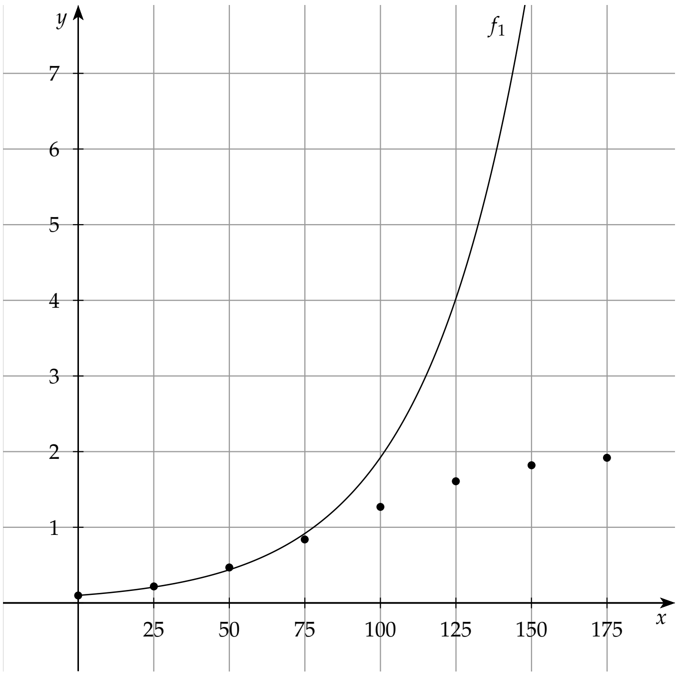
Funktionswerte erhältst du, indem du die Funktion im `Calculator` definierst und dann die x-Werte in die Funktionsgleichung einsetzt. Daraus ergeben sich die folgenden Funktionswerte mit $f1(0)$, $f1(25)$ usw.

0	25	50	75	100	125	150	175	200
0,1	0,21	0,44	0,92	1,92	4,02	8,43	17,64	36,94

2. Schritt: Graph von f_1 und Werte in Koordinatensystem eintragen

Anhand dieser Werte von f_1 und den gegebenen Werten kannst du nun das Koordinatensystem ausfüllen. Die Koordinatenachsen werden mit x und y benannt, wobei die x-Achse in der Regel waagerecht verläuft und die y-Achse senkrecht zur x-Achse steht.

Skaliere das Koordinatensystem so, dass 1 cm auf der x-Achse 25 Tagen entspricht und dass 1 cm auf der y-Achse 1 m entspricht.



▶ Gründe gegen f_1 als Modell des Blumenwachstums

Um eine Funktion begründet vom Realitätsbezug auszuschließen, musst du dir in der Regel den Graphen der Funktion im Vergleich zu realitätsnahen Werten anschauen. Dabei solltest du vor allem auf die Funktionswerte achten, gegen die die Funktion strebt.

- Vergleiche Graph und reale Werte
- Streben der Funktion beachten

Das Schaubild zeigt, dass die beiden Kurven sich bis zum Zeitpunkt $x = 75$ ähnlich sind und der Graph der Funktion f_1 sich sogar unterhalb der Wertekurve bewegt. Nach diesem Zeitpunkt allerdings strebt die Funktion exponentiell gegen ∞. Daher ist die Funktion nicht dafür geeignet das Pflanzenwachstum abzubilden, da eine Pflanze bis zu einer maximalen Größe wächst und dann in ihrem Wachstum stagniert.

1.2 ▶ **Funktion f_2 bestimmen**

Die Funktion soll einen Grad von 4 haben. Um eine Funktion 4. Grades, die die allgemeine Gleichung $f_2(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ besitzt, eindeutig zu bestimmen, benötigst du 5 Bedingungen.

Diese sind dir gegeben durch die 5 x-Werte und die zugehörigen y-Werte aus der Tabelle des Blumenwachstums. Folglich musst du 5 Gleichungen aufstellen, in die du jeweils die x- und y-Werte einsetzt, die du dann mit einer Matrix der Größe 5x6 lösen kannst.

- allgemeine Gleichung einer Funktion 4. Grades: $f_2(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
- gegebene x- und y-Werte einsetzen
- Gleichungssystem mittels einer Matrix lösen

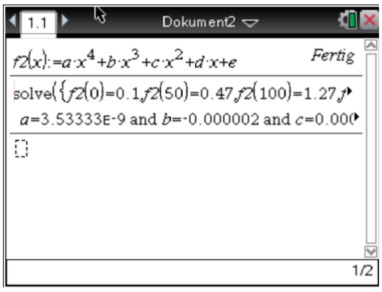
Schreibe dir zunächst alle Bedingungen heraus.

$f(0) = 0,1;\quad f(50) = 0,47;\quad f(100) = 1,27;\quad f(150) = 1,82;\quad f(200) = 1,97$

Definiere in deinem CAS-Rechner die allgemeine Funktion f_2 und setze die Werte ein. Löse die Gleichung mittels eines `solve`-Befehls. Du kannst mehrere `solve`-Befehle in einer Befehlszeile mittels Kommas vernetzen, was dann wie folgt aussieht.

```
solve({f2(0)=0.1, f2(50)=0.47, f2(100)=1.27, f2(150)=1.82, f2(200)=1.97},{a,b,c,d,e})
```

Löse diese Gleichung dann mittels `Enter` auf.



Daraus ergeben sich für die einzelnen Parameter die folgenden Werte.

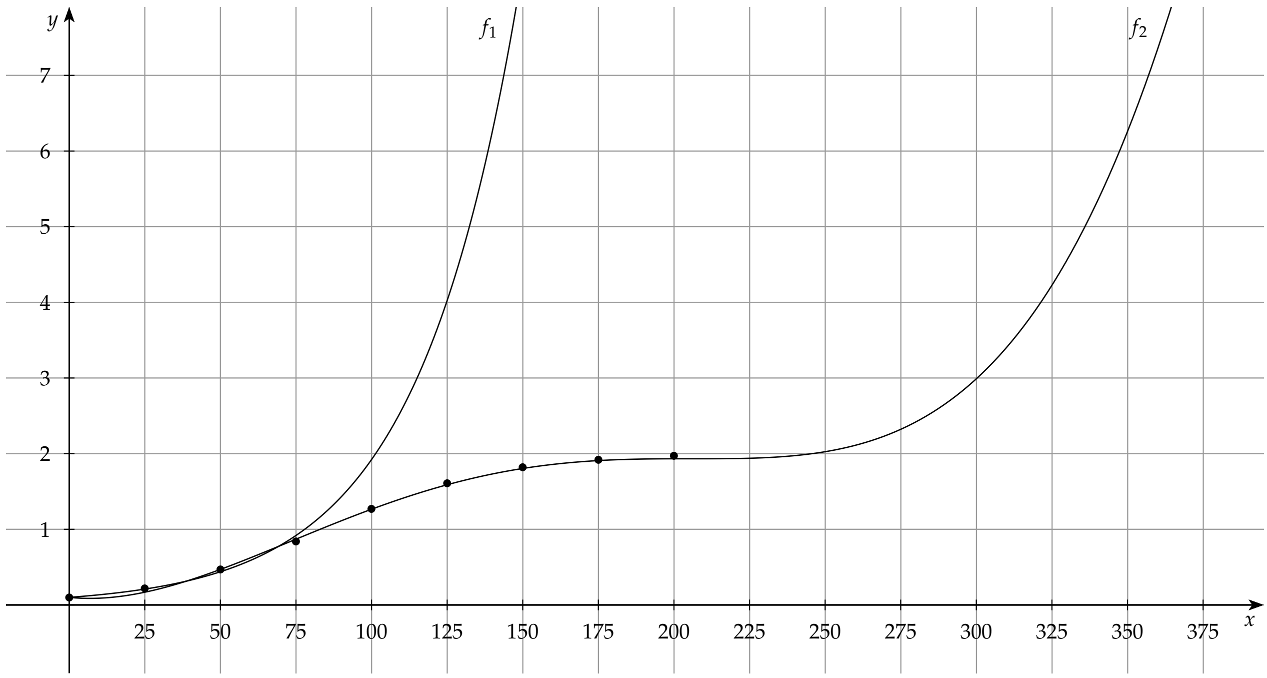
$a = 3,53 \cdot 10^{-9};\quad b = -2 \cdot 10^{-6};\quad c = 3,19 \cdot 10^{-4};\quad d = -4,08 \cdot 10^{-3};\quad e = 0,1$

Daraus folgt dann die Funktionsgleichung mit

$$f_2(x) = 3,53 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 2 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 3,19 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 4,08 \cdot 10^{-3} \cdot x + 0,1.$$

Den Graphen der Funktion kannst du skizzieren, indem du ihn dir von deinem CAS-Rechner zeichnen lässt und dann dich anhand der Punkte, die du im 1. Aufgabenteil eingetragen hast, und des Schaubildes auf dem Rechner orientierst.

Der Graph sieht dann wie folgt aus.



1.3 ▶ **Beurteilung der Näherungsfunktion f_2**

Um eine Aussage über die Aussagekraft des Graphen treffen zu können, musst du den Graphen in 2 Abschnitten betrachten. Zum einen bis zur Stelle, an der der letzte gemessene Wert gegeben ist, also nach 200 Tagen. Zum anderen den Verlauf der Kurve nach diesem Zeitpunkt und damit die langfristige Aussagekraft der Näherungsfunktion, die man aber immer noch als Näherungsfunktion betrachten muss, die nur mit Werten innerhalb des berechneten Bereichs erstellt wurde.

- Graph in 2 Abschnitte aufteilen
- beide Abschnitte getrennt betrachten
- Realitätsbezug zum Wachstum der Sonnenblumen

Teilen wir den Graphen zunächst in 2 Abschnitte ein, zum einen $0 \leq x \leq 200$ und $x \geq 200$.

Der Abschnitt $0 \leq x \leq 200$ beschreibt das Wachstum anhand der gegebenen realistischen Daten, von denen der Graph nur an wenigen Stellen abweicht, was darin begründet ist, dass die Funktion nur aus 5 der 10 gegebenen Werte erstellt wurde.
Zusammenfassend kann man sagen, dass die Funktion in diesem Abschnitt sehr realitätsnah das Wachstum der Sonnenblumen beschreibt.

Im Abschnitt $x \geq 200$ allerdings kann man bei der Betrachtung des Graphen feststellen, dass die Kurve nach $x = 200$ sehr schnell sehr stark ansteigt, sodass sie dann gegen ∞ strebt und folglich keine realistische Aussage mehr über das Wachstum der Sonnenblumen daraus gefolgert werden kann.
Dies unterstreicht die Aussage, dass es sich bei f_2 um eine Näherungsfunktion handelt, da sie nur in dem vorausgesetzten Bereich eine Aussage über die Thematik liefert, aber nicht darüber hinaus.

2.1 ▶ **Werte für a, S und k bestimmen**

Die Werte kannst du über die Funktionsgleichung bestimmen. Da a als $f_3(0)$ angeben ist, kannst du diesen bestimmen, indem du die Funktion in den Funktionseditor einträgst und dann den Wert zu $x = 0$ suchst.

k kannst du erst bestimmen, wenn du S bestimmt hast, da k nur mit S im Exponenten der e-Funktion verknüpft ist. Somit ergibt sich die Reihenfolge der zu bestimmenden Faktoren wie folgt:

1. a
2. S
3. k

Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass gilt: $f_3(0) = a$. Setzt du in deinem CAS-Rechner $x = 0$ in die Funktionsgleichung von f_3 ein, so erhältst du $f_3(0) = 0{,}1$. Folglich erhältst du den Wert für a mit $a = 0{,}1$.

Betrachte nun die Form des Funktionsterms. Aus ihr könnte man aufgrund der Form $f_3(x) = \dfrac{2}{1 + 19 \cdot e^{-0{,}035x}}$ und der allgemeinen logistischen Wachstumsfunktion f mit $f(x) = \dfrac{a \cdot S}{a + (S-a) \cdot e^{-S \cdot k \cdot x}}$ schließen, dass der Wert für $a = 1$ ist.

Da aber gilt $a = 0{,}1$ musst du den Bruch mit $0{,}1$ erweitern, sodass a den richtigen Wert annimmt. Du musst sowohl Zähler als auch Nenner mit $0{,}1$ multiplizieren, damit die Funktionsgleichung nicht verändert wird und die Relationen gleich bleiben.
Somit ergibt sich die Form $f_3(x) = \dfrac{0{,}2}{0{,}1 + 1{,}9 \cdot e^{-0{,}035x}}$.
Diese kannst du nun nutzen, um S zu bestimmen. Entweder nutzt du dazu den Term $a \cdot S = 0{,}2$ oder den Term $S - a = 1{,}9$. Daraus ergibt sich die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 0{,}1 \cdot S &= 0{,}2 && \mid :0{,}1 \\ S &= 2 \end{aligned}$$

Zum Überprüfen kannst du noch die 2. Gleichung nach S auflösen.

$$\begin{aligned} S - 0{,}1 &= 1{,}9 && \mid +0{,}1 \\ S &= 2 && \mid +0{,}1 \end{aligned}$$

Somit wäre S mit $S = 2$ bestimmt. k kannst du nun mit Hilfe des Exponenten der e-Funktion bestimmen, indem du die Gleichung $-S \cdot k = -0{,}035$ aufstellst, S einsetzt und die Gleichung nach k auflöst.

$$\begin{aligned} -2 \cdot k &= -0{,}035 && \mid :(-2) \\ k &= 0{,}0175 \end{aligned}$$

Somit ergeben sich folgende Werte für die 3 Parameter:

$$a = 0{,}1; \qquad S = 2; \qquad k = 0{,}0175$$

▶ f_3 als Funktion des logarithmischen Wachstums nachweisen

Um S und k zu bestimmen haben wir den Funktionsterm im vorherigen Teil mit $0,1 = a$ erweitert. Folglich lautet die Funktion mit a, S und k eingesetzt wie folgt.

$$f_3(x) = \frac{0,1}{0,1} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1,9}{0,1} \cdot \mathrm{e}^{-0,035 \cdot x}}$$

In einem zweiten Schritt ersetzen wir die jeweiligen Werte wieder durch die entsprechenden Parameter.

$$f_3(x) = \frac{a}{a} \cdot \frac{S}{1 + \frac{S-a}{a} \cdot \mathrm{e}^{-S \cdot k \cdot x}}$$

Dies multiplizieren wir nun noch aus um auf die ursprüngliche Form des Funktionsterms zurückzukommen.

$$f_3(x) = \frac{S \cdot a}{a \cdot 1 + \frac{S-a}{a} \cdot \mathrm{e}^{-S \cdot k \cdot x}} = \frac{S \cdot a}{a + (S-a) \cdot \mathrm{e}^{-S \cdot k \cdot x}}$$

Da somit gilt $f_3(x) = f(x)$, ist somit bewiesen, dass f_3 eine Funktion des logarithmischen Wachstums ist.

2.2 **▶ Skizziere den Graphen von f_3**

Den Graphen skizzierst du wieder, indem du einige Wertepaare ausrechnest, diese in eine Wertetabelle einträgst und dann in das Koordinatensystem überträgst. Verwende hierzu am besten die x-Werte, die du auch schon für die Bestimmung der Funktion 4. Grades verwendet hast und einige darüber hinaus bis ca. $x = 400$. Da die Funktion 4. Grades in 50 er Schritte aufgeteilt war, benötigst du also 9 Werte.

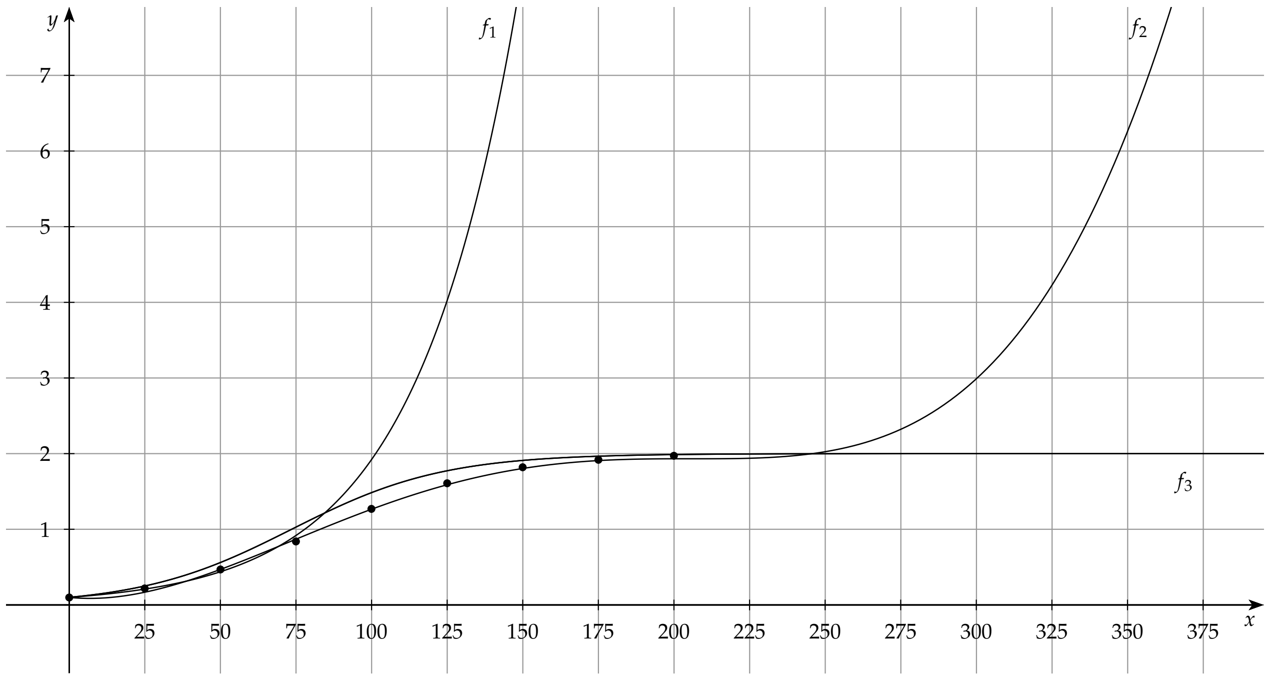
- Wertetabelle aufstellen und Wertepaare finden
- Schritte an Funktion 4. Grades anpassen
- Werte bis $x = 400$ in 50 er Schritten

Erstelle zunächst die Wertetabelle:

0	50	100	150	200	250	300	350	400
0,1	0,46	1,27	1,82	1,97	1,99	2	2	2

Den Graphen kannst du besser skizzieren, indem du ihn dir von deinem CAS-Rechner zeichnen lässt und dann dich anhand der Werte, die du in die Wertetabelle eingetragen hast, und des Schaubildes auf dem CAS orientierst.

Das Schaubild sieht dann wie folgt aus.



2.3 ▶ **Bedeutung des Wendepunkts**

Im Wendepunkt ist die Steigung des Graphen extremal. In unserem Fall liegt im Wendepunkt eine positive Steigung vor, d.hh. die Steigung ist hier **maximal**. Folglich ändert sich hier der Funktionswert am stärksten. Die Steigung bedeutet im Sachzusammenhang das Wachstum der Pflanze zu einem bestimmten Zeitpunkt.

- maximale Steigung von f_3 im Wendepunkt
- größte Änderungsrate
- Steigung beschreibt Stärke des Wachstums

Folglich beschreibt der Wendepunkt den Zeitpunkt, an dem die Pflanze am schnellsten wächst, also am meisten Höhe in kürzester Zeit gewinnt.

▶ **Verhalten von f_3 für große x**

Aufgrund des logistischen Wachstums wird sich $f_3(x)$ für große x einem Grenzwert S annähern, den wir bereits in 2.1 bestimmt haben. Dies spiegelt sich auch in unserer Wertetabelle wieder.

- Aufgabenstellung gibt Grenzwert S vor
- wird bestätigt durch die Wertetabelle und das Schaubild

$f_3(x)$ nähert sich dem Grenzwert von 2 mit großen x an, bis schließlich $f_3(x) = 2$ gilt. Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass die Pflanze bis auf eine Höhe von 2 m wächst und dann in ihrem Wachstum stagniert und die Höhe beibehält.

2.4 ▶ Maximales Abweichen der Werte im Intervall $[0; 200]$ ermitteln

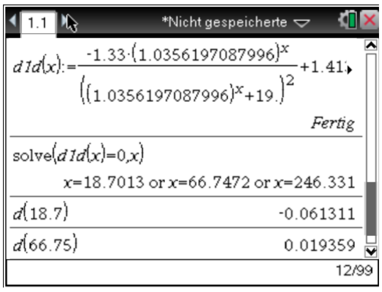
Um das maximale Abweichen der Werte innerhalb eines Intervalls zu ermitteln, musst du die Funktionen voneinander subtrahieren. Dadurch erhältst du die Unterschiede der Funktionswerte an allen Stellen im Bereich des Intervalls. Dann musst du nur noch ein Extremum der Differenzenfunktion suchen, das betragsmäßig den größten Funktionswert hat.

Die Funktion d hat somit die Funktionsgleichung

$$d(x) = f_3(x) - f_2(x)$$

- Funktion zur Darstellung der Differenz aufstellen
- $d(x) = f_3(x) - f_2(x)$
- Extremstelle x_0 im Intervall suchen und Differenz prozentual bestimmen
- Formel zur prozentualen Differenz $p = \dfrac{d(x_0)}{f_3(x_0)} \cdot 100\%$

Trage eine Funktion d in deinen Rechner ein und prüfe sie auf Extremstellen. Leite dazu d ab und setze die Ableitung $d'(x) = 0$. Werte die dir gegebenen Werte innerhalb des Intervalls aus. Gesucht ist der betragsmäßig größte Unterschied der Funktionen. Daher musst du nicht zwischen Minima und Maxima unterscheiden.



Somit ergibt sich an der Stelle $x_0 = 18,7$ das größte Extremum der Differenzenfunktion im gegebenen Intervall.

Nun soll nur noch der prozentuale Unterschied berechnet werden. Dieser wird berechnet über $p = \dfrac{d(x_0)}{f_3(x_0)} \cdot 100\% = p = \dfrac{0,061}{0,183} \cdot 100\% \approx 33,33\%$

Somit ist die Differenz zum Zeitpunkt $x = 18,58$ am größten, wobei $f_3(x_0)$ um $33,39\%$ des eigenen Funktionswerts größer ist als $f_2(x_0)$.

2.5 ▶ Integral berechnen

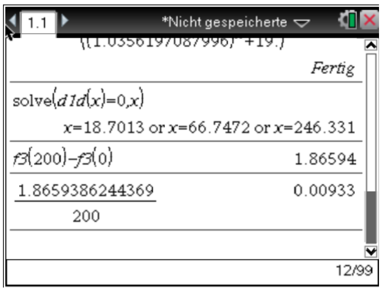
Um das Integral zu berechnen, musst du die Funktion $f_3(x)$ NICHT ableiten. Die allgemeine Form eines Integrals wie es hier gegeben ist, lautet nach dem Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_0^{200} f'(x)\mathrm{d}x = [f_3(x)]_0^{200} = [f_3(200)] - [f_3(0)]$$

Folglich musst du nur die Funktionswerte $f_3(200)$ und $f_3(0)$ voneinander subtrahieren und mit dem Faktor $\frac{1}{200}$ multiplizieren.

- f_3 ist eine Stammfunktion von f_3'
- Bilde $f_3(200) - f_3(0)$
- multipliziere das Ergebnis mit $\frac{1}{200}$

Folglich musst du mit deinem Taschenrechner die Differenz von $f_3(200) - f_3(0)$ bilden und diese mit $\frac{1}{200}$ multiplizieren.
Somit ergibt sich ein Wert von ca. $9,33 \cdot 10^{-3}$.



▶ Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang

Das Integral drückt die durchschnittliche Steigung des Schaubildes im Bereich $0 \leq x \leq 200$ aus. Da wir vorhin bereits die Steigung des Schaubildes als Geschwindigkeit des Wachstums definiert haben, ergibt sich somit, dass das Integral das durchschnittliche Wachstum pro Tag verdeutlicht.
Dem zufolge ergibt sich somit ein durchschnittliches Wachstum nach $f_3(x)$ mit $9,33 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{Tag}}$.