Gegeben sind die Punkte $A(3\,|\,-1\,|\,2)$, $B(7\,|\,2\,|\,11)$, $C(3\,|\,3\,|\,14)$ und $D(-1\,|\,2\,|\,11)$ die Gerade g durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}.$$

a) Entwickeln Sie für die Ebene E, die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist, je eine Gleichung in Parameterform und in Normalform. (5P)

[Zur Kontrolle: $E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$]

b) Weisen Sie nach, dass A, B, C, und D in einer Ebene liegen und Eckpunkte eines Drachenvierecks mit der Symmetrieachse AC sind. (4P)

c) Ein Punkt „wandert" von A aus auf der Symmetrieachse des Drachenvierecks in Richtung C. Dabei bildet er mit den Ecken B und D stets ein gleichschenkliges Dreieck.

Bestimmen Sie seine Koordinaten so, dass dieses gleichschenklige Dreieck Basiswinkel von $30°$ hat. (6P)

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Drachenvierecks $ABCD$.
Das Drachenviereck $ABCD$ rotiert um seine Symmetrieachse. Es entsteht ein Doppelkegel.

Berechnen Sie sein Volumen. (7P)

e) Weisen Sie nach, dass die Gerade g und die Ebene E einen Schnittpunkt haben. (4P)
Untersuchen Sie, ob dieser Schnittpunkt auf der Diagonalen $\overline{AC}$ des Drachenvierecks liegt.

f) Das Drachenviereck beschreibt einen realen Drachen, wobei eine Längeneinheit im Modell für 10 cm in der Wirklichkeit steht. Der Drachen steigt um ca. 30 m. Seine Eckpunkte befinden sich nun in $A'(3\,|\,-27\,|\,308)$, $B'(7\,|\,-18\,|\,311)$, $C'(3\,|\,-15\,|\,312)$ und $D'(-1\,|\,-18\,|\,311)$. Bei diesem Steigungsvorgang hat sich der Drachen gedreht. (4P)
Begründen Sie, dass er sich um die Achse BD gedreht hat.

(30P)