1.1 ▶ **Beschreibung des Verlaufs des Graphen im Sachzusammenhang** (3BE)

Bei der Einnahme des Medikaments nach $t = 0$ Zeitschritten befindet sich noch kein Wirkstoff im Blut, in den ersten 4 Stunden steigt die Wirkstoffkonzentration jedoch rasant an, wobei die maximale Konzentration nach 4 Stunden ca. 6 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ beträgt.
Danach sinkt die Konzentration langsam wieder, nach 24 Stunden liegt sie dann fast wieder bei 0 $\frac{\text{mg}}{\ell}$.

▶ **Berechnung der Wirkstoffkonzentration nach 24 Stunden**

Die Wirkstoffmenge ergibt sich als Funktionswert von f nach $t = 24$ Stunden:

$f(24) = 4 \cdot 24 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 24} = 96 \cdot \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}24$

Nach 24 Stunden befinden sich noch etwa $0{,}24\ \frac{\text{mg}}{\ell}$ des Wirkstoffs im Blut des Patienten.

1.2 ▶ **Berechnung der maximalen Wirkstoffkonzentration** (6BE)

Um die maximale Wirkstoffmenge zu berechnen, bestimmst du das **Maximum** von f.

▶▶ **Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung**

Leite f mit der Produktregel zweimal ab. Beachte dabei, dass die Ableitung von $\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ nach der Kettenregel

$\left(\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right)' = \mathrm{e}^{-0{,}25t} \cdot (-0{,}25) = -0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ lautet:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} + 4t \cdot \left(-0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right) \\ &= 4\mathrm{e}^{-0{,}25t} - t\mathrm{e}^{-0{,}25t} && \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}25t}(4-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= (-0{,}25)\mathrm{e}^{-0{,}25t} \cdot (4-t) + (-1) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} && \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{0{,}25t} \cdot (-0{,}25 \cdot (4-t) - 1) \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}25t} \cdot (-1 + 0{,}25t - 1) \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}25t} \cdot (0{,}25t - 2) \end{aligned}$$

Die Maximumsstelle ist diejenige Stelle, an der $f'(t)$ den Wert Null annimmt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ \mathrm{e}^{-0{,}25t}(4-t) &= 0 && \mid \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ist als Exponentialfunktion stets größer Null!} \\ 4 - t &= 0 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Es ergibt sich also $t = 4$ als einzige mögliche Extremstelle. Bestimme den Funktionswert der 2. Ableitung an der Stelle $t = 4$, um diese als Maximumsstelle nachzuweisen:

$f''(4) = \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 4}(0{,}25 \cdot 4 - 2) = \mathrm{e}^{-1} \cdot (-1) = -\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}37 < 0$

Damit ist $t = 4$ die einzige lokale Maximimusstelle von $f(t)$. Die Wirkstoffkonzentration zu diesem Zeitpunkt beträgt dabei:

$f(4) = 4 \cdot 4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 4} = 16\mathrm{e}^{-1} \approx 5{,}89\ \frac{\text{mg}}{\ell}$.

Es muss nun noch ausgeschlossen werden, dass sich an den **Rändern des Definitionsbereichs** noch größere Werte, sogenannte Randextrema, befinden. Werte dazu die Funktionswerte der Randstellen $t = 0$ und $t = 24$ aus:

$f(0) = 4 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{-0,25 \cdot 0} = 0 \cdot \mathrm{e}^0 = 0$

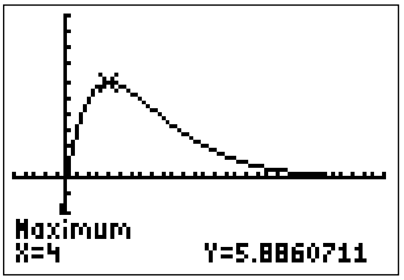
$f(24) \approx 0,24$

Die Funktionswerte an den Rändern sind nicht größer, daher ist das lokale Maximum bei $t = 4$ auch das absolute Maximum.

Die maximale Wirkstoffmenge wird nach 4 Stunden erreicht und beträgt dann etwa $5,89\ \frac{\text{mg}}{\ell}$.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne den Graphen von f und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{MAXIMUM}}$ den Hochpunkt von f.



Es ergibt sich der Punkt $H\,(4 \mid 5,89)$. Die maximale Wirkstoffmenge wird nach 4 Stunden erreicht und beträgt dann etwa $5,89\ \frac{\text{mg}}{\ell}$..

► Nachweis der stärksten Konzentrationsabnahme bei $t = 8$

Hier ist nach der Stelle mit der „negativsten“ Steigung gefragt, d.h. an der Stelle, an der Schaubild am stärksten fällt. Dies geschieht immer im **Wendepunkt** einer Funktion.

►► Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Die Wendestelle ist diejenige Stelle, an der $f''(t) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f''(t) &= 0 \\ \mathrm{e}^{-0,25t}(0,25t-2) &= 0 \qquad \mid \mathrm{e}^{-0,25t} \text{ ist wiederum stets größer als Null} \\ 0,25t - 2 &= 0 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

Setze $t = 8$ in die dritte Ableitung ein, um nachzuweisen, dass an der Stelle $t = 8$ auch wirklich eine Wendestelle vorliegt. Die dritte Ableitung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} f'''(t) &= (-0,25)\mathrm{e}^{-0,25t} \cdot (0,25t-2) + \mathrm{e}^{-0,25t} \cdot 0,25 \qquad \mid \mathrm{e}^{-0,25t} \text{ ausklammern} \\ &= \mathrm{e}^{-0,25t}((-0,25) \cdot (0,25t-2) + 0,25) \\ &= \mathrm{e}^{-0,25t}(-0,0625t + 0,5 + 0,25) \\ &= \mathrm{e}^{-0,25t}(0,75 - 0,0625t) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$f'''(8) = \mathrm{e}^{-0,25 \cdot 8} \cdot (0,75 - 0,0625 \cdot 8) = \mathrm{e}^{-2} \cdot (0,25) > 0$

Somit besitzt das Schaubild von f an der Stelle $t = 8$ einen Wendepunkt, d.h. einen Punkt mit extremer Steigung. Bestimme $f'(8)$, um die Steigung im Wendepunkt zu bestimmen.
$f'(8) = \mathrm{e}^{-2}(4-8) = -4\mathrm{e}^{-2} < 0$

Da $f'(8) < 0$ fällt die Kurve in diesem Bereich; damit ist $t = 8$ die Stelle, an der das Schaubild am stärksten fällt.

Es muss nun nur noch gezeigt werden, dass $f'(8)$ auch tatsächlich die stärkste Abnahme auf dem Definitionsbereich beschreibt. Untersuche dazu die Randwerte der ersten Ableitung:

$$f'(0) = \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 0}(8-2\cdot 0) = \mathrm{e}^{0}\cdot 8 = 1\cdot 8 = 8$$

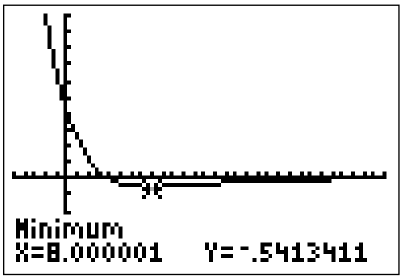
$$f'(24) = \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 24}(8-2\cdot 24) = \mathrm{e}^{-6}\cdot(-40) = -40\mathrm{e}^{-6} \approx -0{,}0992$$

An den Randstellen ist die erste Ableitung größer als an der Wendestelle, daher nimmt die Wirkstoffkonzentration zu diesem Zeitpunkt auch wirklich am stärksten ab.

▶▶ Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Es ist nach der Stelle mit der „negativsten" Steigung gefragt. Berechne also mit dem GTR den Tiefpunkt der ersten Ableitung.

Zeichne den Graphen von f' und bestimme mit 2nd → TRACE (CALC) → MINIMUM den Tiefpunkt von f'.



Es ergibt sich die Stelle $t = 8$. Somit nimmt die Wirkstoffkonzentration an der Stelle $t = 8$ am stärksten ab.

1.3 **▶ Nachweis der Stammfunktion von $f(t)$** (4BE)

Um die gegebene Funktion $F(t)$ als Stammfunktion nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass $F'(t) = f(t)$ gilt. Leite $F(t)$ nach der Produkt- und Kettenregel ab:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -16\cdot\left(1\cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t} + (t+4)\cdot\left(-0{,}25\mathrm{e}^{-0{,}25t}\right)\right) \quad | \ \mathrm{e}^{-0{,}25t} \text{ ausklammern} \\ &= -16\cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t}\cdot(1+(-0{,}25)\cdot(t+4)) \\ &= -16\cdot(-0{,}25t)\cdot \mathrm{e}^{1-0{,}25t-1} \\ &= -16\cdot(-0{,}25t)\,\mathrm{e}{-0{,}25t} \\ &= 4t\mathrm{e}^{-0{,}25t} = f(t) \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist.

▶ Berechnung der mittleren Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden

▶▶ Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden, also im Intervall $[0;\,12]$ kann mit der gegebenen Formel und der Stammfunktion von F berechnet werden:

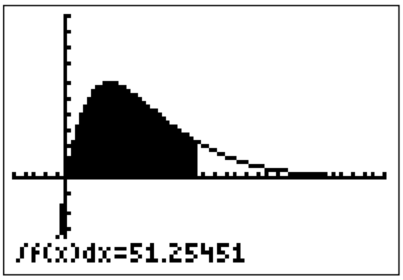
$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{12-0}\int_0^{12} f(t)\,dt = \frac{1}{12}\cdot[F(t)]_0^{12} = \frac{1}{12}\cdot(F(12)-F(0)) \\ &= \frac{1}{12}\left(-16\cdot(12+4)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot 12} - (-16)\cdot(0+4)\cdot \mathrm{e}^{-0.25\cdot 0}\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(-256\cdot \mathrm{e}^{3} + 64\cdot \mathrm{e}^{0}\right) \\ &\approx 4{,}27 \end{aligned}$$

Die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden betrug etwa $4,27\ \frac{\text{mg}}{\ell}$.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Benutze wieder die Formel $m = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} (f(t))dt$. Berechne das Integral mit dem GTR:

Zeichne den Graphen von f und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \int f(x)dx}$ das Integral im gewünschten Intervall.



Es ergibt sich $\int_0^{12} (f(t))dt \approx 51,25$

Für die mittlere Wirkstoffkonzentration folgt also $m = \frac{1}{12} \cdot 51,25 \approx 4,27$.

1.4 **► Zeitpunkte der gleichen Konzentration bestimmen** (6BE)

Das Schaubild von f und das von g stellen die Konzentration der beiden Medikamente dar. Die Zeitpunkte, zu denen die Konzentrationen der Medikamente gleich sind, sind also genau die **Schnittpunkte** der Schaubilder von f und g.

►► Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Setze f und g gleich und löse nach t auf:

$$\begin{aligned}
4 \cdot t\mathrm{e}^{-0,25t} &= 8 \cdot t\mathrm{e}^{-0,4t} && \mid -(8t\mathrm{e}^{-0,4t}) \\
4t\mathrm{e}^{-0,25t} - 8t\mathrm{e}^{-0,4t} &= 0 && \mid 4t \text{ ausklammern} \\
4t \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,25t} - 2\mathrm{e}^{-0,4t}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Setze also die Faktoren $4t$ und die Klammer **getrennt** Null.

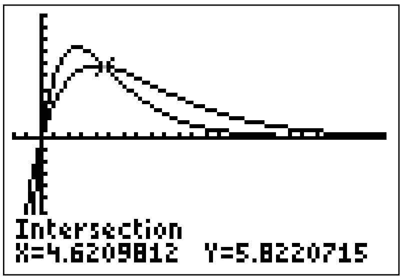
$$t_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-0,25t} - 2\mathrm{e}^{-0,4t} &= 0 && \mid +2\mathrm{e}^{-0,4t} \\
\mathrm{e}^{-0,25t} &= 2\mathrm{e}^{-0,4t} && \mid \ln(\ ) \\
\ln(\mathrm{e}^{-0,25t}) &= \ln\left(2\mathrm{e}^{-0,4t}\right) && \mid \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \\
-0,25t &= \ln(2) + \ln(\mathrm{e}^{-0,4t}) \\
-0,25t &= \ln(2) - 0,4t && \mid +0,4t \\
0,15t &= \ln(2) && \mid : (0,15) \\
t_2 &= \frac{\ln(2)}{0,15} = \frac{\ln(2)}{\frac{15}{100}} = \ln(2) \cdot \tfrac{100}{15} = \frac{20}{3}\ln(2)
\end{aligned}$$

Zu Beginn der Verabreichung ($t = 0$) und $\frac{20}{3}\ln(2) \approx 4,6$ Stunden nach der Einnahme sind die Konzentrationen der beiden Medikamente im Blut beider Patienten gleich.

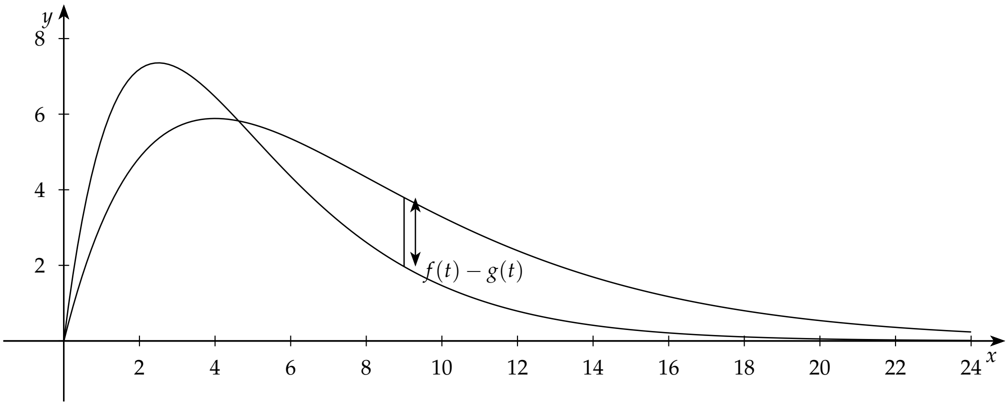
▶▶ Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne f und g und bestimme mit 2nd → TRACE (CALC) → INTERSECT den Schnittpunkt der beiden Kurven



Zu Beginn der Verabreichung ($t = 0$) und $\frac{20}{3}\ln(2) \approx 4,6$ Stunden nach der Einnahme sind die Konzentrationen der beiden Medikamente im Blut beider Patienten gleich.

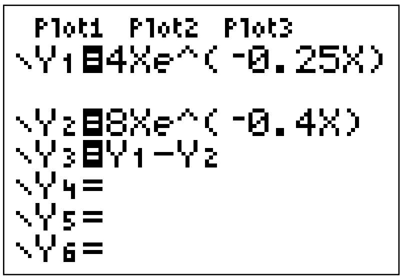
▶ Maximalen Konzentrationsunterschied bestimmen



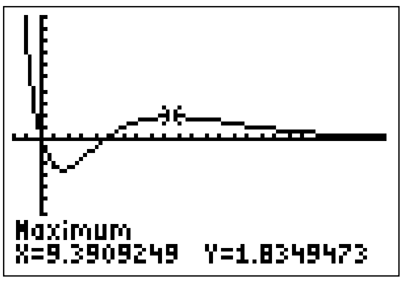
Der maximale Konzentrationsunterschied zwischen 5 und 11 Stunden nach der Einnahme entspricht dem **maximalen Abstand** der beiden Schaubilder im Bereich von $t = 5$ bis $t = 11$.
In diesem Bereich verläuft das Schaubild von f oberhalb von dem von g.
Bilde also eine neue Funktion $d(t) = f(t) - g(t)$. Sie gibt dir den Abstand von f und g an einer Stelle x an. Berechne den **Hochpunkt** dieser Funktion und du erhältst die Stelle mit dem größten Abstand.

Benutze den **GTR**, um diese Aufgabe zu lösen.

Speichere f und g als Y_1 und Y_2. Über das Menü VARS → Y-VARS → Function gibst du bei Y_3 ein: $Y_1 - Y_2$



Blende nun Y_1 und Y_2 aus und zeichne Y_3.
Bestimme mit 2nd → TRACE (CALC) → MAXIMUM den Hochpunkt zwischen $t = 5$ und $t = 11$.



Etwa $9,39$ Stunden nach der Einnahme ist der Konzentrationsunterschied am größten.

1.5 ▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen** (5BE)

Sei Z die Anzahl der Frauen, die das Medikament vertragen. Z ist binomialverteilt mit $p = 0,8$ und $n = 5$.

$$\begin{aligned} P(Z \geq 4) &= P(Z = 4) + P(Z = 5) \\ &= \binom{5}{4} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^5 + \binom{5}{5} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^0 \\ &= 0,4096 + 0,3277 = 0,7373 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $73,73\%$ vertragen mindestens 4 Frauen das Medikament.

▶ **Fehlerwahrscheinlichkeit ermitteln**

Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt werden, dass die Hypothese $H_0 : p_0 = 0,8$ beibehalten wird, obwohl tatsächlich nur 50% der Frauen das Medikament vertragen. Der Annahmebereich für H_0 ist $A = \{61; \ldots ; 100\}$. Berechne also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Anteil von 50% mindestens 61 der 100 befragten Frauen angeben, das Medikament zu vertragen.

Sei Z die Anzahl der Frauen. Dann ist Z binomialverteilt mit $p = 0,5$ und $n = 100$. Die folgenden Wahrscheinlichkeitswerte sind der Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung entnommen, die Werte sind $p = 0,5$, $n = 100$ und $k = 60$.

$$P(Z \geq 61) = 1 - P(Z \leq 60) = 1 - 0,9824 = 0,0176$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1,76\%$ wird die Hypothese $H_0 : p_0 = 0,8$ fälschlicherweise beibehalten.

(24BE)