a) **► Koordinaten des Mittelpunktes von $\overline{EC}$ bestimmen** (7P)

Gegeben ist der Würfel $ABCDEFGH$ mit den Eckpunkten $A\,(6|-6|-6)$, $B\,(6|6|-6)$, $D\,(-6|-6|-6)$ und $E\,(6|-6|6)$. Die Kanten dieses Würfels verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen.
Weiterhin sind die Punkte $\mathrm{P}(3|-2|-1)$ und $\mathrm{Q}(-9|6|3)$ gegeben.

Gesucht ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EC}$. In der Aufgabenstellung ist allerdings nur der Punkt E gegeben. Bestimme also in einem ersten Schritt die Koordinaten des Punktes C. Hierbei kannst du die Eigenschaft des Würfels ausnutzen, dass alle Kanten parallel verlaufen. Du findest also eine Vektorkette um die Koordinaten von C zu bestimmen:

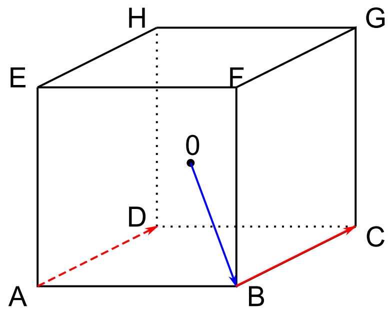
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$$

Berechne im zweiten Schritt den Mittelpunkt der Strecke $\overline{EC}$. Hierzu hast du zwei Möglichkeiten. Zum einen über eine Vektorkette, zum anderen über die Formel des Mittelpunkts einer Strecke $\overline{AB}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

1. Schritt: Koordinaten der noch fehlenden Punkte bestimmen

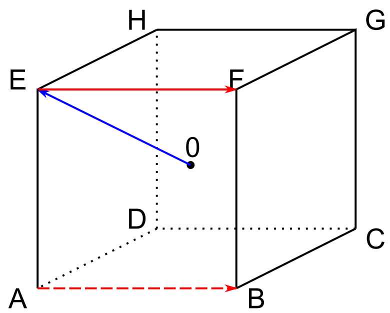
Die Koordinaten des Punkts C kannst du mit Hilfe einer Vektorkette berechnen.
Zuerst gehst du den blauen Vektoren $\overrightarrow{OB}$, um zum Punkt B zu gelangen. Da der rote Vektor $\overrightarrow{AD}$ dieselbe Länge und Richtung aufweist wie $\overrightarrow{BC}$, kannst du an $\overrightarrow{OB}$ den Vektor $\overrightarrow{AD}$ anhängen und gelangst somit zum Punkt C.
Vektoren aneinander zu hängen, heißt hierbei, sie zu addieren.



Du erhältst also:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6-6 \\ -6-(-6) \\ -6-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6) \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Den Eckpunkt F kannst du erreichen, indem du an den Ortsvektor von E den Vektor $\overrightarrow{EF}$ anhängst. Dieser ist dir allerdings noch nicht bekannt.
Da der Vektor $\overrightarrow{AB}$ dieselbe Länge und Richtung aufweist wie der Vektor $\overrightarrow{EF}$, kannst du $\overrightarrow{AB}$ an dessen Stelle setzen:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF}\\ &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OE} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-6 \\ 6-(-6) \\ -6-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Koordinaten der Punkte G und H kannst du analog berechnen:

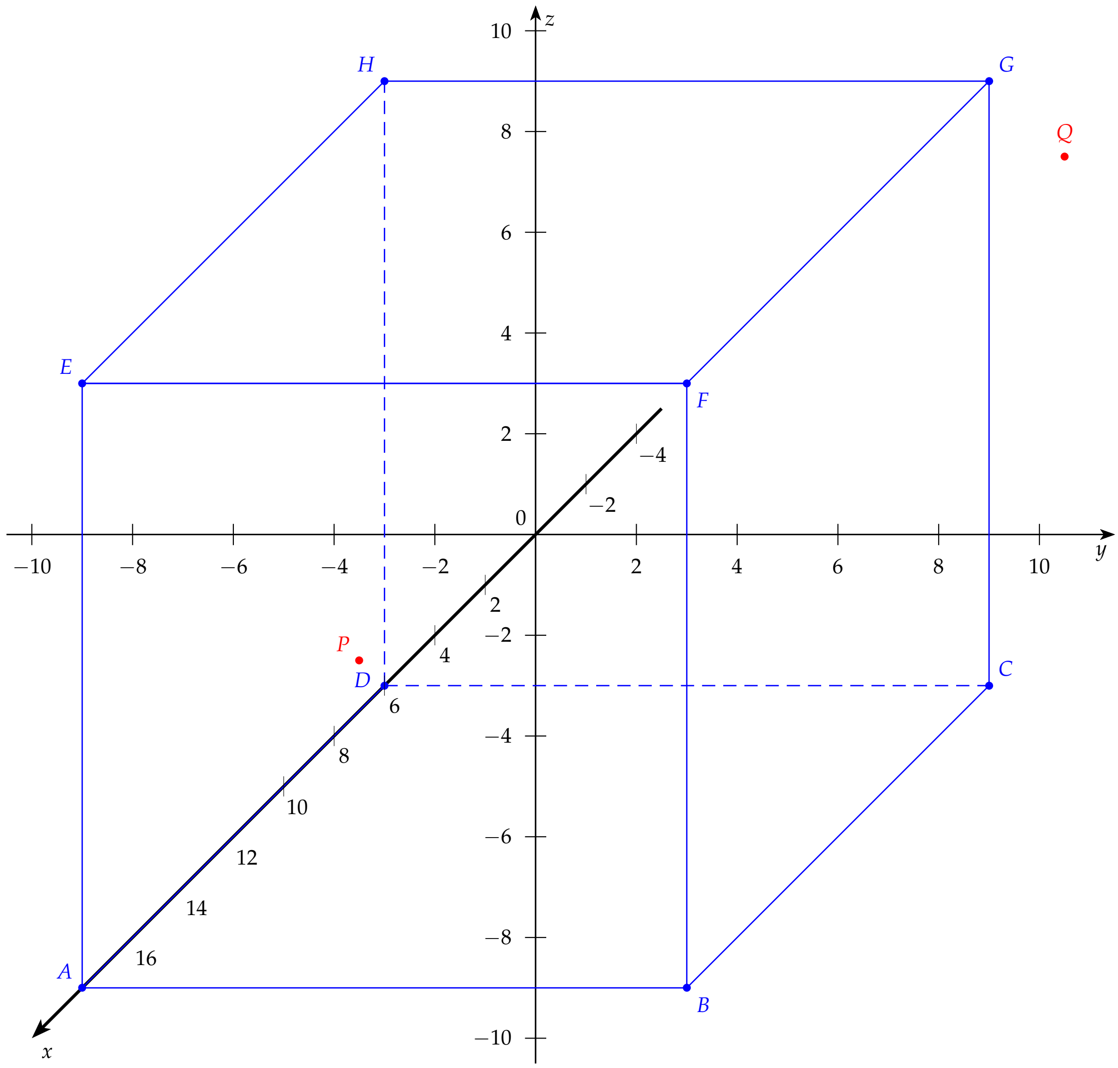
$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassend erhältst du also alle Eckpunkte des Würfels:

$A\,(6|-6|-6)$, $B\,(6|6|-6)$, $C\,(-6|6|-6)$, $D\,(-6|-6|-6)$, $E\,(6|-6|6)$, $F\,(6|6|6)$, $G\,(-6|6|6)$ und $H\,(-6|-6|6)$.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes kannst du dir nun eine Skizze anfertigen, indem du die Punkte, so wie es in der Planskizze des Würfels zu sehen ist, miteinander verbindest:



2. Schritt: Mittelpunkt der Strecke EC bestimmen

►► Lösungsweg A: Bestimmung des Mittelpunktes über eine Vektorkette

Indem du an den Vektor $\overrightarrow{OE}$ den halben Vektor $\overrightarrow{EC}$ anhängst, gelangst du zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{EC}$.
Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} \\ &= \overrightarrow{OE} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}) \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6-6 \\ 6-(-6) \\ -6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

►► Lösungsweg B: Bestimmung des Mittelpunktes über die Formel des Mittelpunkts einer Strecke

Die Formel zur Bestimmung des Mittelpunktes einer Strecke $\overline{AB}$ lautet:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

In vorliegenden Fall suchen wir den Mittelpunkt der Strecke $\overline{EC}$.
Es gilt also:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\6\\-6\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes M der Diagonalen $\overrightarrow{EC}$ sind $M\,(0|0|0)$

► Begründen, dass von P und Q nur einer innerhalb des Würfels liegt

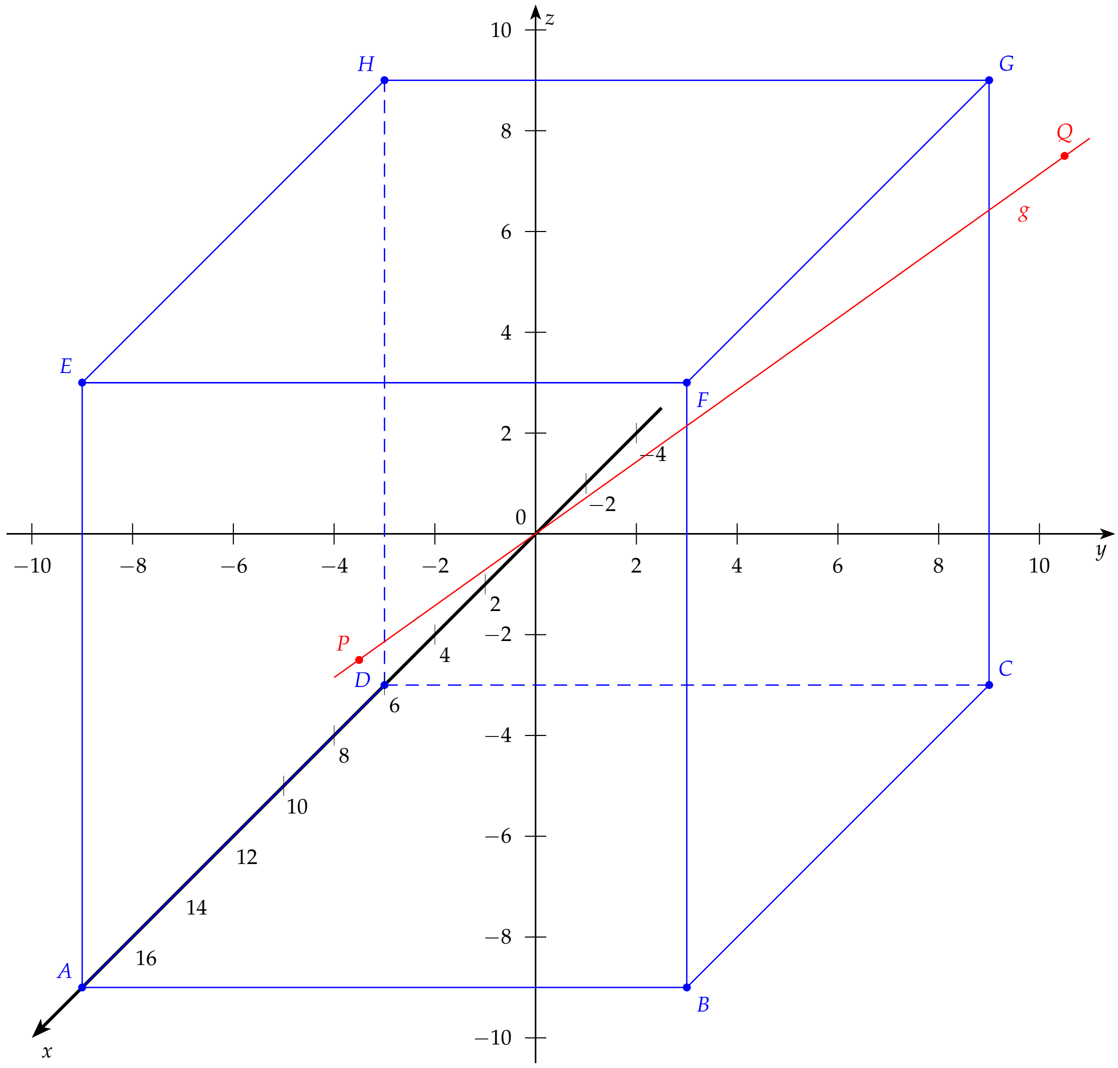
Da die Koordinaten der Eckpunkte des Würfels alle mindestens 6 LE vom Ursprung entfernt sind, müssen Punkte die außerhalb des Würfels liegen, mindestens eine Koordinate größer als 6 aufweisen. Andernfalls befindet sich der Punkt innerhalb des Würfels.

Da die Koordinaten von $P\,(3|-2|-1)$ alle kleiner als 6 sind liegt dieser Punkt innerhalb des Würfels.
Weil hingegen die x-Koordinate von $Q\,(-9|6|3)$ größer als 6 ist, kann dieser Punkt nur außerhalb des Würfels liegen.

b) **► Koordinaten des Schnittpunktes S bestimmen** (8P)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte P und Q und schneidet die hintere Würfelfläche $DCGH$ im Punkt S.

Du kannst sie dir zur besseren Anschauung in deine Skizze einzeichnen:



Um die Koordinaten des Schnittpunktes S zu bestimmen, schneidest du die Gerade g mit der hinteren Würfelfläche $DCGH$. Du berechnest also den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene.

Zuerst stellst du hierfür die Geradengleichung von g auf. Wähle dazu P oder Q als Stützpunkt aus und stellst den Richtungsvektor vom Stützpunkt zum noch fehlenden Punkt auf.

Als zweites bestimmst du die Ebenengleichung der hinteren Würfelfläche $DCGH$. Diese sollte in Parameterform sein, damit du sie mit der Geraden schneiden kannst und ein lineares Gleichungssystem erhältst. Du wählst dir also einen Stützpunkt aus, von dem du zwei Spannvektoren zu zwei weiteren Punkten aufstellen kannst.

Anschließend setzt du die Geraden- und die Ebenengleichung gleich und erhältst ein lineare Gleichungssystem, welches sich nach den skalaren Parametern der Gleichungen auflösen lässt.

Setzt du die Lösungen wieder in die zugehörigen Gleichungen ein, so erhältst du die Koordinaten des Schnittpunktes S.

Das Einsetzen der anderen Parameter in die andere Gleichung dient zur Probe.

1. Schritt: Geradengleichung aufstellen

Nimmst du den Punkt P als Stützpunkt von g, so erhältst du als Geradengleichung:

$$\begin{aligned} g: \quad \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + r \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9-3 \\ 6-(-2) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Schritt: Ebenengleichung der hinteren Würfelfläche aufstellen

Benutzt du D als Stützpunkt und DC sowie DH als Spannvektoren, so erhältst du als Ebenengleichung in Paramterform für die hintere Würfelfläche $DCGH$:

$$\begin{aligned} E_{DCGH}: \quad \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DC} + t \cdot \overrightarrow{DH} \\ &= \overrightarrow{OD} + s \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) + t \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD}) \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6-(-6) \\ 6-(-6) \\ -6-(-6) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6-(-6) \\ -6-(-6) \\ 6-(-6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Schritt: Geraden- und Ebenengleichung gleichsetzen

Um die Koordinaten des Schnittpunktes S zu erhalten, benötigst du die skalaren Parameter der Geraden- und Ebenengleichung, für die sich beide schneiden.
Du setzt also beide Gleichungen gleich und bringst alle Parameter auf eine Seite.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}}^{g} = \overbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}}^{E_{DCGH}} \qquad \left| + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \left| -r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kannst du nun ein folgendes lineares Gleichungssystem aufstellen und es mit Hilfe des Einsetzungsverfahren lösen.

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 9 &=& 12r & \mid :12 \\
\text{II} & 4 &=& -8r+12s & \\
\text{III} & 5 &=& -4r+12t & \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \mid \text{in II einsetzen} \\
\text{II} & 4 &=& -8r+12s & \\
\text{III} & 5 &=& -4r+12t & \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \\
\text{II} & 4 &=& -8\cdot\frac{3}{4}+12s & \\
\text{III} & 5 &=& -4r+12t & \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \\
\text{II} & 4 &=& -6+12s & \mid +6 \\
\text{III} & 5 &=& -4r+12t & \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \\
\text{II} & 10 &=& 12s & \mid :12 \\
\text{III} & 5 &=& -4r+12t & \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \mid \text{in III einsetzen} \\
\text{II} & \frac{5}{6} &=& s & \\
\text{III} & 5 &=& -4r+12t & \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \\
\text{II} & \frac{5}{6} &=& s & \\
\text{III} & 5 &=& -\cancel{4}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}+12t & \mid +3 \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \\
\text{II} & \frac{5}{6} &=& s & \\
\text{III} & 8 &=& 12t & \mid :12 \\ \hline
\text{I} & \frac{3}{4} &=& r & \\
\text{II} & \frac{5}{6} &=& s & \\
\text{III} & \frac{2}{3} &=& t & \\ \hline
\end{array}$$

Es gilt also:

$$r = \frac{3}{4}$$
$$s = \frac{5}{6}$$
$$t = \frac{2}{3}$$

Alternativ: LGS mit GTR lösen

Du kannst das lineare Gleichungssystem auch mit Hilfe deines GTR lösen. Dafür musst du das Gleichungssystem zunächst so umformen, dass auf der linken Seite nur die zu suchenden Parameter stehen:

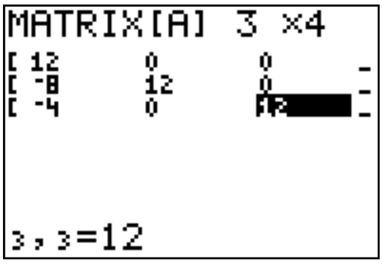
$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 9 & = & 12r \\
\text{II} & 4 & = & -8r+12s \\
\text{III} & 5 & = & -4r+12t \\
\hline
\text{I} & 12r & = & 9 \\
\text{II} & -8r+12s & = & 4 \\
\text{III} & -4r+12t & = & 5 \\
\hline
\end{array}$$

Gib nun das Gleichungssystem als Matrix in deinen GTR ein. Wechsle zunächst mit $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{x}^{-1}\,(\texttt{MATRIX})}$ in den Matrix-Editor.

Klickst du zweimal nach rechts, so erreichst du $\boxed{\texttt{EDIT}}$. Hier kannst du die Matrizen bearbeiten.

Gib die Matrix unter `[A]` ein, wähle eine (3×4)-Matrix mit 3 Zeilen und 4 Spalten aus und trage die Werte entsprechend ein.

Zum Beispiel kannst du in die erste Spalte die r, in die zweite Spalte die s und in die dritte Spalte die t eintragen.

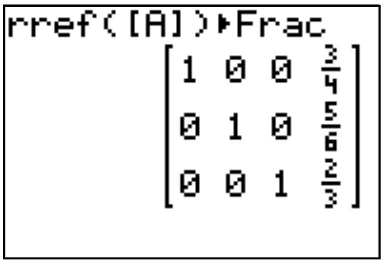


Verlasse nach Eingabe der Matrix das Menü mit $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{MODE}\,(\texttt{QUIT})}$. Dein GTR kann nun die Matrix so umstellen, dass du die Lösung direkt ablesen kannst.

Gib hierfür folgende Tastenkombination ein $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{x}^{-1}\,(\texttt{MATRIX})}$, $\boxed{\texttt{MATH}}$ und $\boxed{\texttt{B: rref(}}$.

Den Befehl `rref(` vervollständigst du nun über $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{x}^{-1}\,(\texttt{MATRIX})}$, $\boxed{\texttt{NAMES}}$, $\boxed{\texttt{1: [A]}}$, $\boxed{\texttt{MATH}}$ und $\boxed{\texttt{1: Frac}}$.

Durch den Befehl `1: Frac` werden dir in der Matrix nur Brüche und keine Dezimalzahlen angezeigt.



In der ersten Spalte stehen alle Elemente mit r, in der zweiten alle mit s und in der dritten alle mit t.

Du kannst der neuen Matrix also entnehmen, dass:

$$r = \frac{3}{4}$$
$$s = \frac{5}{6}$$
$$t = \frac{2}{3}$$

4. Schritt: Parameter r in Geradengleichung einsetzen

Setzt du den Parameter $r = \frac{3}{4}$ in die Geradengleichung von g ein, so ergibt sich für den Schnittpunkt S:

$$\begin{aligned} g: \quad \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mid r = \tfrac{3}{4} \text{ einsetzen} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Schritt: Probe

Die Probe erfolgt durch Einsetzen von $s = \frac{5}{6}$ und $t = \frac{2}{3}$ in die Ebenengleichung von E_{DCGH}.

$$\begin{aligned} E_{DCGH}: \quad \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DC} + t \cdot \overrightarrow{DH} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \mid s = \tfrac{5}{6} \text{ und } t = \tfrac{2}{3} \text{ einsetzen} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ergibt sich also eine wahre Aussage.

Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $S\,(-6|4|2)$.

► Untersuchen, ob Mittelpunkt des Würfels auf g liegt

Es soll untersucht werden, ob eine Punkt auf einer Geraden liegt.
Hierfür setzt du den Punkt in die Geradengleichung ein und führst eine Punktprobe durch.
Setzt du den Mittelpunkt des Würfels $M_W\,(0|0|0)$ in die Gleichung der Geraden g ein, so erhältst du:

$$g:\quad \overrightarrow{OM_W} = \overrightarrow{OP} + r\cdot\overrightarrow{PQ}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-12\\8\\4\end{pmatrix} \qquad |\ M_W\,(0|0|0) \text{ einsetzen}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-12\\8\\4\end{pmatrix} \qquad |\ -\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}-12\\8\\4\end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kannst du nun folgendes lineares Gleichungssystem aufstellen und jede Zeile nach r auflösen:

$$\begin{array}{ll|l}
\text{I} & -3 = -12\,r & :(-12) \\
\text{II} & 2 = 8\,r & :8 \\
\text{III} & 1 = 4\,r & :4 \\
\hline
\text{I} & \frac{3}{12} = r & \\
\text{II} & \frac{2}{8} = r & \\
\text{III} & \frac{1}{4} = r & \\
\hline
\text{I} & \frac{1}{4} = r & \\
\text{II} & \frac{1}{4} = r & \\
\text{III} & \frac{1}{4} = r & \\
\hline
\end{array}$$

Da keine falschen Aussagen auftreten, gilt also $r = \dfrac{1}{4}$.

Der Mittelpunkt des Würfels $M_W\,(0|0|0)$ liegt auf der Geraden g.