

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = ax + \frac{1}{ax-1}$; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Die Graphen dieser Funktionen sind G_a .

- a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a , die Gleichungen aller Asymptoten einschließlich der Polgeraden von G_a und das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ in Abhängigkeit von a an. (7P)

- b) Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen lokalen Extrempunkt E_1 besitzen und ermitteln Sie dessen Koordinaten und seine Art. (10P)

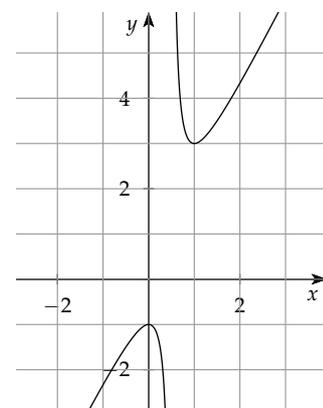
Neben E_1 hat jeder Graph G_a einen weiteren lokalen Extrempunkt E_2 .

Weisen Sie nach, dass dieser vom Parameter a abhängig ist und berechnen Sie diejenigen Werte a , für die die Punkte E_1 und E_2 einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben.

- c) Die Tangente t an G_2 im Tiefpunkt $T(1 \mid 3)$ und eine Ursprungsgerade g schließen einen Winkel von 45° ein. Bestimmen Sie eine mögliche Gleichung für g .

Es gibt Parameterwerte $a \neq 1$ derart, dass die zugehörige Tangente an G_a im Punkt $P(1 \mid f_a(1))$ orthogonal zur Geraden $y = ax$ verläuft.

Bestimmen Sie alle Werte für a .

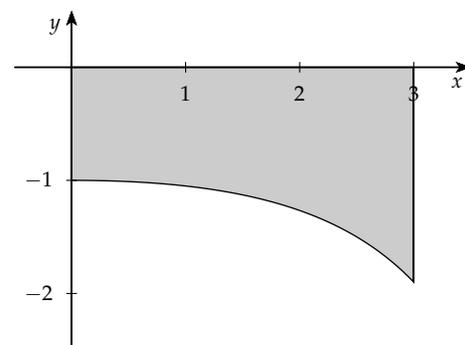


- d) Bestimmen Sie, welcher Punkt des Graphen G_2 (siehe Abbildung) den geringsten Abstand zum Punkt $M(2 \mid 0)$ hat und berechnen Sie diesen Abstand. (7P)

- e) Der Graph $G_{\frac{1}{5}}$ schließt mit der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ und den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein (siehe nebenstehende Darstellung).

Der Körper, der durch Rotation dieser Fläche um die x -Achse entsteht, entspricht modellhaft der Form eines Kassenhäuschens mit kreisförmiger Grund- und Deckfläche. Der größere der beiden Kreise beschreibe die Grundfläche.

Berechnen Sie den umbauten Raum für dieses Kassenhäuschen (1 LE = 1 m).



- f) Ein Architekturbüro plant für das aus Teilaufgabe e) um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte und somit aufrecht gestellte Kassenhäuschen ein Dach, welches einen parabelförmigen Querschnitt besitzt. Das passgenau aufgesetzte Dach soll eine Querschnittsfläche von $\frac{1}{3} \text{ m}^2$ besitzen. Ermitteln Sie die Gleichung eines möglichen Graphen, der die obere Begrenzung des Dachquerschnittes beschreibt. (5P)