a) ▶ **Parameter $a$ und $k$ bestimmen** (12P)

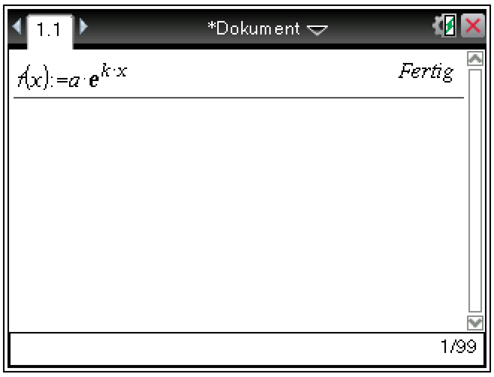
Mit der Funktion $f$ mit $f(x) = a \cdot e^{kx}$ wird das Wachstum der Population modelliert. Die Parameter $a$ und $k$ sollst du laut Aufgabenstellung mithilfe der Daten zu $x = 0$ und $x = 40$ bestimmen. In der angegebenen Tabelle findest du die zugehörige Anzahl von Mäusen:

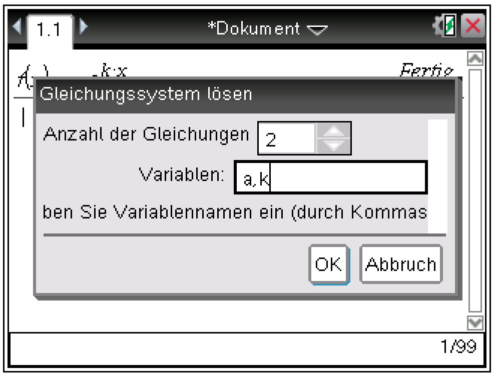
$x = 0$: 50 Mäuse; und $x = 40$: 350 Mäuse

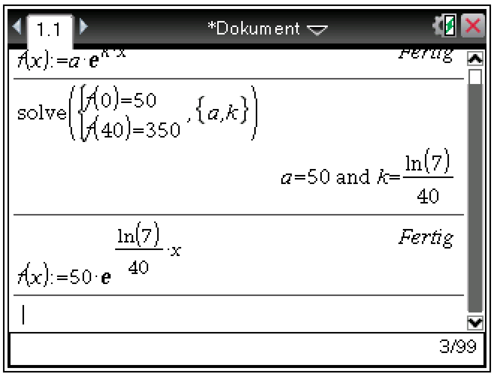
Du kannst so vorgehen:

- Formuliere mithilfe der beiden Datensätze je eine Gleichung und fasse diese in einem linearen Gleichungssystem zusammen.
- Löse dieses Gleichungssystem mit dem CAS.

Zum Zeitpunkt $x = 0$ gibt es 50 Mäuse. Für unsere Funktion $f$ heißt das: $f(0) = 50$. Weiterhin gilt analog: $f(40) = 350$. Diese beiden Gleichungen bilden gemeinsam ein Gleichungssystem.
Definiere zunächst die Funktion $f$ mit $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ in deinem CAS.
Im `Calculator`-Modus deines CAS findest du dann unter `menu → 3 → 7 → 1` den Befehl für „Gleichungssystem lösen". Gib als erste Gleichung $f(0) = 50$ und als zweite Gleichung $g(40) = 350$ ein und löse so nach $a$ und $k$.




Das CAS liefert die Werte $a = 50$ und $k = \dfrac{\ln(7)}{40}$. Es folgt so die Funktionsgleichung

$f(x) = 50 \cdot e^{\frac{\ln(7)}{40} \cdot x} \approx 50 \cdot e^{04865x}$.

▶ **Mäusepopulation im Lagerhaus nach 47 Tagen berechnen**

Laut Aufgabenstellung kann der Mäusebestand in Abhängigkeit der Zeit in den ersten 50 Tagen durch eine Exponentialfunktion $f$ beschrieben werden. Die Parameter ihrer Funktionsgleichung hast du soeben bestimmt. Die Funktionsgleichung von $f$ lautet:

$f(x) = 50 \cdot \mathrm{e}^{0{,}04865 \cdot x}$

Die Mäusepopulation nach 47 Tagen kann mithilfe dieser Funktion berechnet werden, da $47 < 50$ ist. Setze also $x = 47$ in die Funktionsgleichung von $f$ ein und berechne den Bestand der Mäuse im Lagerhaus zu diesem Zeitpunkt:

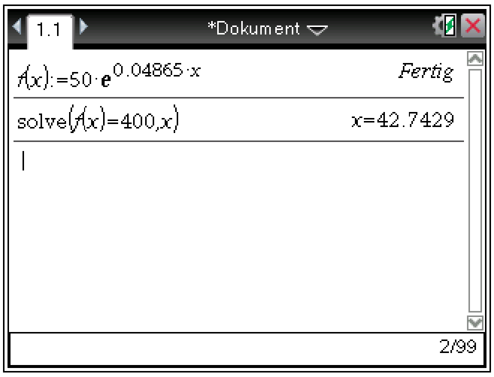
$f(47) = 50 \cdot \mathrm{e}^{0{,}04865 \cdot 47} \approx 492{,}05$

Runde das Ergebnis auf ganze Mäuse und erhalte eine Population von 492 Mäusen nach 47 Tagen im Lagerhaus.

**▶ Den Tag bestimmen, an dem die Anzahl von 400 Mäusen überschritten wird**

Gesucht ist der Tag $x_1$, in dessen Verlauf die Population $f(x)$ die Zahl 400 überschreitet. Da die Exponentialfunktion $f$ aufgrund der positiven Werte für $k$ und $a$ streng monoton steigend ist, kannst du den Zeitpunkt bestimmen, zu dem die Population genau 400 beträgt. Ab diesem Moment ist die Zahl der Mäuse im Lagerhaus in jedem Fall größer als 400.

Setze also $f(x) = 400$ und löse nach dem Zeitpunkt $x$ auf.
Dabei kann dir dein CAS behilflich sein:
Definiere die Funktion $f$. Setze den Funktionsterm $f(x)$ gleich 400 und löse die Gleichung mit Hilfe des `solve`-Befehls nach $x$ auf.
Für $x \approx 42{,}74$ wird die Zahl der Mäuse gleich 400.
Daraus kannst du folgern: $f(42)$ ist aufgrund der Monotonie kleiner als 400, nach dem 42. Tag ist die Mäusepopulation definitiv kleiner als 400.



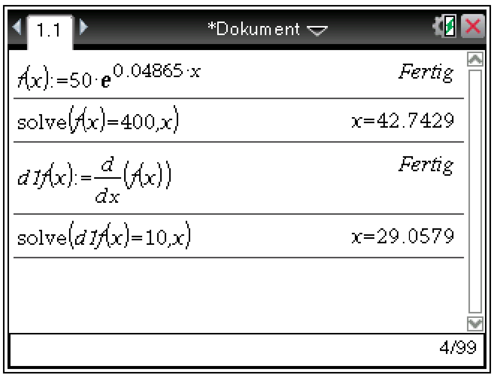

$f(43)$ dagegen ist größer als 400, nach dem 43. Tag ist der Bestand also größer als die betrachtete Grenze. Damit ist $x_1 = 43$.
Demnach muss die Population den Wert 400 im Verlauf des 43. Tages überschritten haben.

**▶ Tag bestimmen, an dem die Zuwachsrate erstmals mehr als 10 Mäuse beträgt** (4P)

Die Zuwachsrate der Mäuse im Lagerhaus entspricht gerade der Änderungrate der Funktion $f$ für ihren Bestand. Die Änderungsrate einer Funktion ist wiederum durch ihre erste Ableitung bestimmt.

Du kannst also die erste Ableitung $f'$ von $f$ bilden und anschließend mit dem CAS den ersten Zeitpunkt $x_2$ ermitteln, zu dem $f'(x)$ den Wert 10 überschreitet.

Die erste Ableitung $f'$ kannst du mit Hilfe deines CAS bilden:
Die Funktion $f$ hast du bereits definiert. Jetzt kannst du die Funktion mit `4:Analysis → 1:Ableitung` ableiten. Wir speichern die Ableitungsfunktion unter `d1f(x)`. Jetzt kannst du die Ableitungsfunktion gleich 10 setzen und mit Hilfe des `solve`-Befehls nach $x$ auflösen.



Das CAS liefert: Bei $x \approx 29,06$ nimmt $f'$ den Wert 10 an. Das heißt, am 30. Tag wird die momentane Zuwachsrate erstmalig größer als 10 Mäuse pro Tag. $x_2$ ist damit 30.

b) **► Bestimmen des Grenzwerts und im Sachzusammenhang erläutern** (13P)

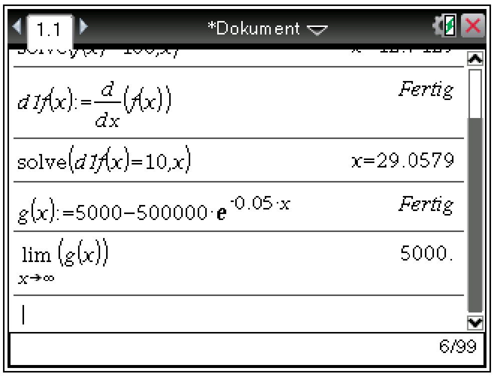
Ab dem 150. Tag soll die Mäusepopulation durch beschränktes Wachstum beschrieben werden können mit der Funktionsvorschrift:

$g(x) = 5.000 - 500.000 \cdot \mathrm{e}^{-0,05 \cdot x}$

Um den Grenzwert zu bilden, kannst du das Verhalten von $g$ für sehr große $x$ betrachten, das heißt, wir lassen $x$ gegen $\infty$ laufen.

Dabei kann dir dein CAS behilflich sein:
Definiere die Funktion $g$ mit dem :=-Befehl. Anschließend kannst du mit $\boxed{\text{4:Analysis} \rightarrow \text{4:Limes}}$ den Grenzwert bilden. Gib zunächst an, dass $x$ gegen $\infty$ laufen soll. Danach tippst du die Funktion ein, deren Grenzwert du ermitteln möchtest. In diesem Fall ist das die, zuvor definierte, Funktion $g$.

$\lim\limits_{x \to \infty} 5.000 - 500.000\mathrm{e}^{-0,05 \cdot x} = 5.000$




Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung?

Der Grenzwert einer beschränkt wachsenden Funktion gibt immer an, gegen welchen Wert die Funktionswerte „auf lange Sicht“ streben. In unserem Fall geben die Funktionswerte den Mäusebestand im Lagerhaus an.

Der Grenzwert bedeutet damit im Sachzusammenhang, dass sich langfristig 5.000 Mäuse im Lagerhaus befinden.

**► Tag bestimmen, an dem 99 % des maximalen Bestandes überschritten werden**

Auch in dieser Aufgabe wird beschränktes Wachstum für die Mäusepopulation angenommen. Zuvor hast du bestimmt, dass die zugehörige Funktionsvorschrift langfristig gegen den Wert 5.000 strebt.

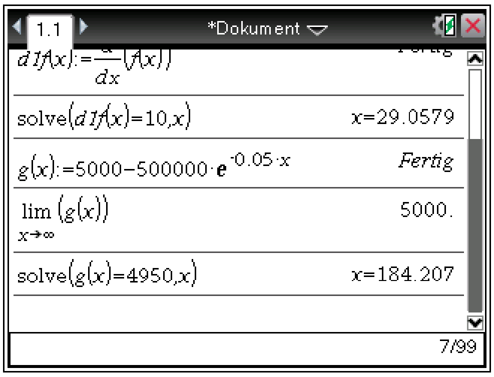
Da der zweite Ausdruck in der Funktionsvorschrift aufgrund der e-Funktion mit dem negativen Exponenten für große $x$ immer kleiner wird und gegen Null strebt, ist $g$ insgesamt monoton steigend. Dies kannst du mit dem CAS überprüfen, indem du die Ableitung bildest und deren Schaubild auf Schnittpunkte mit der $x$-Achse überprüfst. Daraus folgt: Der Grenzwert 5.000 ist zugleich der maximal mögliche Bestand.

99 % des maximalen Bestandes ergeben dann

$0,99 \cdot 5.000 = 4.950$

Mäuse. Gesucht ist nun der Zeitpunkt $x_3$, zu dem $g$ den Wert 4.950 annimmt. Genau dann erreicht die Anzahl der Mäuse 99 % des maximal möglichen Bestandes.

Setze nun $g(x) = 4.950$ und löse nach dem Zeitpunkt $x$ auf:
Dabei kann dir dein CAS behilflich sein:
Die Funktion $g$ hast du bereits definiert. Setze sie gleich 4.950 und löse sie mit Hilfe des `solve`-Befehls nach $x$ auf.
Es ergibt sich für den Zeitpunkt, zu dem die Zahl der Mäuse 99 % des maximal möglichen Bestandes erreicht, $x \approx 184,2$.




Nach dem 184. Tag ist der Bestand demnach kleiner als 99 % des Grenzwerts, nach dem 185. Tag liegt sie darüber.

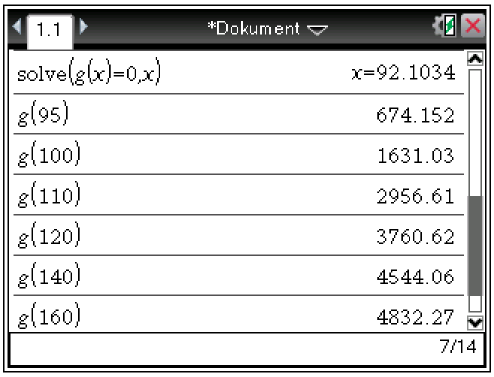
Daher überschreitet die Population den betrachteten Wert am 185. Tag. $x_3$ ist damit 185.

**► Graphen von $g$ und die Asymptote in das Koordinatensystem der Anlage skizzieren**

Zum ungefähren Skizzieren reicht es, einige Punkte zu berechnen, durch die der Graph von $g$ geht. Nimm dazu Werte für $x$, für die die Funktion $g$ auf jeden Fall positive Werte annimmt, damit du die entsprechenden Punkte auch in das Koordinatensystem einzeichnen kannst.

Die Stelle $x$, an der die Funktion $g$ gerade den Wert Null annimmt sowie einige Punkte, durch die der Graph von $g$ geht, kannst du mithilfe deines CAS ermitteln.

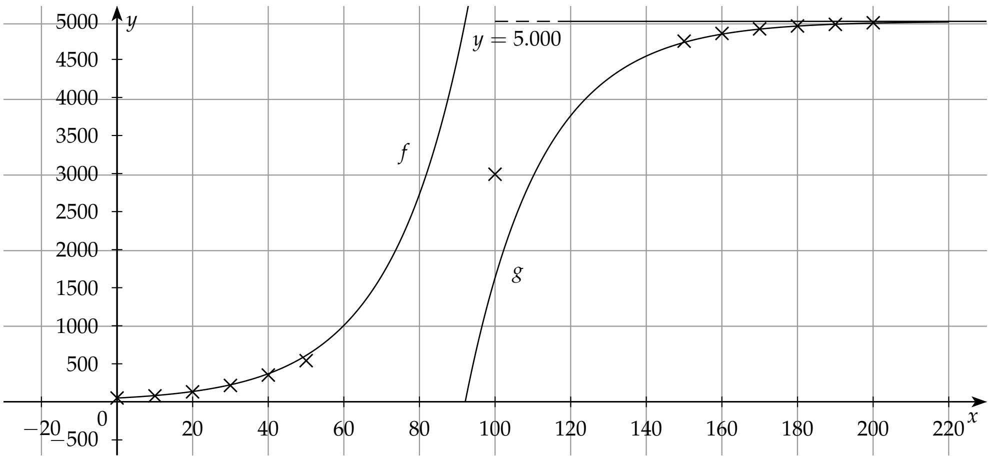
Die Funktion $g$ hast du bereits definiert. Setze sie nun gleich Null und löse die Gleichung mit Hilfe des `solve`-Befehls nach $x$ auf. Das CAS liefert $x \approx 92$ für die Schnittstelle von $g$ mit der $x$-Achse.
Die Wertepaare kannst du berechnen, indem du für $x$ einige Werte einsetzt und dir den Funktionswert berechnen lässt.




Mit diesen Informationen kannst du den Graphen von $g$ in das gegebene Koordinatensystem einzeichnen.

Die Asymptote ist nun diejenige Gerade, an die sich der Graph von $g$ langfristig annähert. Du weißt, dass $g$ gegen den Grenzwert 5.000 strebt. Der Graph nähert sich also einer konstanten Geraden mit der Gleichung $y = 5.000$ an.

Diese Gerade ist die gesuchte Asymptote. Zeichne auch diese in das Schaubild ein:




▶ **Möglichkeiten und Grenzen der verwendeten Modelle erläutern**

Betrachten wir die Abbildung mit den beiden Graphen von $f$ und $g$ und den Wertepaaren. Du kannst erkennen:

- Für Wertepaare mit $x < 50$ stimmt der Graph von $f$ mit diesen nahezu überein.
- Ab $x = 50$ steigt $f$ immer schneller, die Übereinstimmung mit den Wertepaaren geht verloren.
- Zwischen $x = 50$ und $x = 150$ ist ebenso kaum Übereinstimmung mit dem Graph von $g$ vorhanden.
- Für $x > 150$ stimmt dann der Graph von $g$ fast mit den Wertepaaren in diesem Bereich überein.

Daraus folgt:

Die beiden Modelle zur Beschreibung der Mäusepopulation geben nur lokal die Wirklichkeit wieder. Im Intervall $[0;50]$ stellt exponentielles Wachstum ziemlich genau die Entwicklung des Mäusebestandes dar, für Zeitpunkte außerhalb dieses Intervalls ist das Modell jedoch unbrauchbar, wie man am Verlauf des Graphen von $f$ erkennen kann.

Analog eignet sich beschränktes Wachstum sehr gut, um den Bestand in Abhängigkeit der Zeit im Intervall $[150;200]$ zu beschreiben, für andere Zeiträume ist dieses Modell aber ebenso ungeeignet, wie man am Verlauf des Graphen von $f$ sehen kann.

Darin liegen sowohl Möglichkeiten als auch Grenzen in der Anwendung beider Modelle.

c) ▶ **Ableiten von $g$ ohne CAS** (10P)

Beim Ableiten von e-Funktionen solltest du die Kettenregel beachten. Denk daran, dass die Ableitung der e−Funktion immer die e−Funktion selbst ist.

$$\begin{aligned} g(x) &= 5.000 - 500.000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05\cdot x} \\ g'(x) &= 0 - 500.000 \cdot \underbrace{(-0{,}05)}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}05\cdot x}}_{\text{äußere Ableitung}} \\ &= 25.000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05\cdot x} \end{aligned}$$

Die Ableitung der Funktion $g$ lautet $g'(x) = 25.000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05\cdot x}$.

**▶ $g'(160)$ im Sachzusammenhang erläutern**

Die Funktion $g$ beschreibt den Bestand der Mäuse im Lagerhaus in Abhängigkeit der Zeit. Die erste Ableitung von $g$ stellt die momentane Änderungsrate dieser Funktion dar, also die Änderungsrate des Bestands der Mäuse.

$g'(160)$ stellt damit die Änderungsrate der Population zum Zeitpunkt $x = 160$, also nach dem 160. Tag, beziehungsweise zu Beginn des 161. Tages dar. Diese beträgt laut

$$g'(160) = 8{,}3...$$

etwa 8,3 Mäuse pro Tag. Die Population wächst nach dem 160. Tag also mit etwa 8,3 Mäusen pro Tag.

**▶ Bestimmen, wann die momentane Änderungsrate gleich der durchschnittlichen ist**

Zuvor haben wir die momentane Änderungsrate $g'$ von $g$ zu

$$g'(x) = 25.000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x}$$

bestimmt. Gesucht ist nun der Zeitpunkt $x$, zu dem $g'$ genauso groß wird, wie die durchschnittliche Änderungsrate zwischen dem 150. und dem 200. Tag.

Allgemein wird die durchschnittliche Änderungsrate $M$ einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a;b]$ mit der Formel

$$M = \frac{\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

berechnet. Zum gesuchten Zeitpunkt gilt dann:

$$M = g'(x)$$

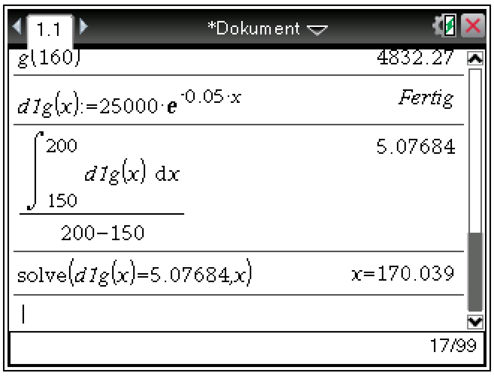
In unserem Fall entsprechen die Werte für die Intervallgrenzen $a = 150$ und $b = 200$, die Funktion $f'$ entspricht $g'$. Bestimme nun mit der angegebenen Formel die durchschnittliche Änderungsrate $M$:

$$M = \frac{\int_{150}^{200} g'(x)\,\mathrm{d}x}{200-150}$$

Du kannst die durchschnittliche Änderungsrate mit Hilfe deines CAS berechnen. Gib dazu den Term $M$ in dein CAS ein.

Die durchschnittliche Änderungsrate beträgt ungefähr 5,07684.

Gefragt ist nun, wann die momentane Änderungsrate, also der Wert der ersten Ableitung, genau dieser durchschnittlichen Änderungsrate entspricht. Gesucht ist also der Zeitpunkt zu dem gilt: $g'(x) = 5{,}07684$. Löse diese Gleichung mit dem `solve`-Befehl.




Das CAS liefert $x \approx 170{,}04$. Die momentane Änderungsrate von $g$ ist damit im Laufe des 171. Tages gleich der durchschnittlichen Änderungsrate zwischen dem 150. und 200. Tag.

d) **► Einfluss von $S$ auf den Schnittpunkt mit der $y$-Achse und die Asymptote begründen** (9P)

Gegeben ist eine Parameterfunktion $g_S$ mit der Gleichung:

$$g_S(x) = S - S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x}$$

Wir wollen nun zunächst untersuchen, wie sich der Funktionsgraph im Schnittpunkt mit der $y$-Achse verhält und welchen Einfluss der Parameter $S$ auf das Verhalten hat.

Im Schnittpunkt mit der $y$-Achse ist der $x$-Wert Null. Du kannst also den Funktionswert von $g_S$ an der Stelle $x = 0$ berechnen und das Ergebnis im Hinblick auf den Einfluss von $S$ betrachten:

$$g_S(0) = S - S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot 0} = S - S \cdot 1 = 0$$

Du kannst erkennen: Der Funktionswert bei $x = 0$ ist für alle Werte von $S$ gleich Null. $S$ hat also keinen Einfluss auf den Schnittpunkt mit der $y$-Achse, er liegt nämlich bei

$N(0\,|\,0)$.

Betrachten wir nun den Einfluss von $S$ auf die Asymptote. Zuvor hast du festgestellt, dass die Asymptote eine konstante Funktion ist. Der Wert dieser Funktion ist in unserem Fall gleich dem Grenzwert von $g_S$ für sehr große $x$, also für $x \to \infty$. Untersuche also:

$$\lim_{x \to \infty} g_S(x)$$

Da die e-Funktion mit dem negativen Exponenten für große $x$ gegen Null läuft, ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} g_S(x) = \lim_{x \to \infty} \left(S - S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x}\right) = S - S \cdot 0 = S$$

Die Asymptote hat also die Form:

$$y = S$$

Der Funktionsterm der Asymptote entspricht also gerade dem Parameterwert von $S$.

**► Prüfen, ob $\frac{1}{2}S$ von allen $g_S$ an der gleichen Stelle erreicht wird**

Gesucht ist die Stelle $x$, an der die Parameterfunktion $g_S$ den Wert $\dfrac{1}{2}S$ annimmt, an der also gilt:

$$g_S(x) = \frac{1}{2}S$$

Das gesuchte $x$ ist nun gerade dann für alle $g_S$ gleich, wenn das Ergebnis nicht vom Parameter $S$ abhängt. Löse also die obige Gleichung nach $x$ auf und prüfe das Ergebnis auf Unabhängigkeit von $S$:

$$\begin{aligned}
g_S(x) &= \tfrac{1}{2}S \\
S - S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x} &= \tfrac{1}{2}S && \mid -\tfrac{1}{2}S \\
\tfrac{1}{2}S - S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x} &= 0 && \mid S \text{ ausklammern} \\
S \cdot \left(\tfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Laut Aufgabenstellung ist $S > 0$. Also kann nur die Klammer Null werden. Betrachte sie getrennt:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-0{,}05\cdot x} &= 0 && \mid +\mathrm{e}^{-0{,}05x} \\ \tfrac{1}{2} &= \mathrm{e}^{-0{,}05x} && \mid \ln(\,) \\ \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^{-0{,}05x}\right) \\ \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) &= -0{,}05x && \mid : (-0{,}05) \\ -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}05} &= x \approx 13{,}86 \end{aligned}$$

Die Stelle $x$, an der $g_S$ den Wert $\frac{1}{2}S$ annimmt, ist unabhängig von $S$. Das heißt: Alle Funktionen $g_S$ erreichen den betrachteten Wert an der gleichen Stelle.

**► Aussage beweisen**

Übersetze die Aufgabe zunächst wieder: Die lokale Änderungsrate ist die Änderungsrate an einer bestimmten Stelle $x$. Sie wird dir gegeben durch die erste Ableitung $g'$. Die Behauptung ist also: Wenn $S$ verdoppelt wird, so verdoppelt sich der Wert der Ableitung an jeder Stelle $x$. Dies kannst du auch in Formeln aufschreiben.

Wenn $g_S$ die Funktion mit dem „normalen" Wert für $S$ ist, dann ist $g_{2\cdot S}$ die Funktion, bei der der Wert von $S$ verdoppelt wurde. Sie hat die Funktionsgleichung
$g_{2S}(x) = 2S - 2S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x}$.

Wenn sich nun mit Verdopplung von $S$ auch jeder Ableitungswert verdoppeln soll, dann müsste gelten:
$g'_{2\cdot S}(x) = 2 \cdot g'_S(x)$.
Denn dann wäre mit verdoppeltem $S$ der Wert der Ableitung doppelt so groß wie mit normalem $S$. Leite also beide Funktionen ab und vergleiche die beiden Terme. Verwende dabei wieder die Kettenregel.

$$\begin{aligned} g'_S(x) &= 0 - S \cdot (-0{,}05) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x} \\ &= 0{,}05 \cdot S \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{2S}(x) &= 0 - 2S \cdot (-0{,}05) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x} \\ &= 2 \cdot 0{,}05\mathrm{e}^{-0{,}05x} \end{aligned}$$

Du erkennst: Die Ableitungsfunktion von $g_{2S}$ unterscheidet sich nur durch den Faktor zwei von $g'_S$. Also gilt:
$g'_{2S}(x) = g'_S(x)$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.