a) (1) ► **Begründen, dass Zufallsgröße X binomialverteilt ist**

Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der fehlgeleiteten Gepäckstücke. Ist Zufallsgröße X mit $p = 0,017$ und $n = 1000$ binomialverteilt, so müssen folgende drei Eigenschaften erfüllt sein:

1. Für das Zufallsexperiment gibt es nur zwei mögliche Ausgänge: entweder ein Gepäckstück kommt zeitgleich mit dem Passagier am Zielflughafen an oder eben nicht.
2. Die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Ausgänge des Zufallsexperiments sind mit 0,983 bzw. 0,017 stets konstant.
3. Es kann davon ausgegangen werden, dass das Verschwinden der Gepäckstücke unabhängig voneinander angesehen werden kann, also rein zufällig auftritt.

Sind diese Eigenschaften für X erfüllt, so kann X als binomialverteilt angesehen werden.

(2) ► **Berechnen des Erwartungswertes und der Standardabweichung von X**

Der Erwartungswert μ einer binomialverteilten Zufallsgröße berechnet sich über folgende Formel:
$\mu = n \cdot p$

Die Standardabweichung σ berechnet sich hingegen über diese Formel:
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

X ist auch hier mit $p = 0,017$ und $n = 1000$ verteilt.

Erwartungswert μ:

$\mu = 1000 \cdot 0,017 = 17$

Standardabweichung σ:

$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,017 \cdot (1-0,017)} = \sqrt{16,711} \approx 4,088$

$\Longrightarrow$ Der Erwartungswert von X ist $\mu = 17$, die Standardabweichung ist $\sigma \approx 4,088$.

(3) ► **Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 14 Gepäckstücke fehlgeleitet werden**

Deine Aufgabe ist es hier, mithilfe der Standardnormalverteilung, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass höchstens 14 von insgesamt 1000 Gepäckstücken fehlgeleitet werden. Dazu approximierst du die Binomialverteilung durch die Standardnormalverteilung.
Gehe dabei Schrittweise vor:

1. Schritt:

Zeigen, dass der Satz von DeMoivre - Laplace angewandt ($\sigma > 3$) und die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ mit der Standardnormalverteilung bestimmt werden darf.

2. Schritt:

Damit du hier, mithilfe der Standardnormalverteilung die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ berechnen kannst, passt du die dir gegebene Binomialverteilung auf die Gegebenheiten der Standardnormalverteilung an. Verwende dazu diese Transformation:

$$z = \frac{(k+0,5)-\mu}{\sigma}$$

(Vergiss hier nicht die Stetigkeitskorrektur!).

3. Schritt:

Bestimme die zu z zugehörige Wahrscheinlichkeit mit der Tabelle zur kumulierten Standardnormalverteilung.

Berechnen der Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$

1. Schritt:

Da hier $\sigma = 4,088 > 3$ gilt, kann der Satz von DeMoivre - Laplace angewandt werden.

2. Schritt:

Setze $k = 14$ in die dir oben gegebene Transformation ein, um später die zugehörige Wahrscheinlichkeit mit der Tabelle zur Standardnormalverteilung bestimmen zu können.

$$z = \frac{(14+0,5)-17}{4,088} \approx -0,61$$

3. Schritt:

Bestimme nun mithilfe der Tabelle zur kumulierten Standardnormalverteilung die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$, in dem du folgenden Satz anwendest:

$$P(X \leq 14) = \Phi(-0,61) = 1 - \Phi(0,61) = 1 - 0,7291 = 0,2709$$

$\Longrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 14 Gepäckstücke fehlgeleitet werden, liegt bei 27,09 %.

b) (1) ▸ **Berechnen der Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 4)$**

Deine Aufgabe ist es hier, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass mindestens 4 Gepäckstücke fehlgeleitet werden. Betrachtet wird dabei Zufallsgröße Y, welche mit $n = 100$ und $p = 0,05$ binomialverteilt ist. Berechne die Wahrscheinlichkeit mit dem Term zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße:

$$P(Y \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Tipp: Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis von $P(Y \geq 4)$.

Berechnen der Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 4)$:

Gegenereignis zu $P(Y \geq 4)$: $1 - P(X < 4)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{100}{i} \cdot 0,05^i \cdot (1 - 0,05)^{100-i} \\ &= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) \\ &= 1 - \left(\binom{100}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{100-0} + \ldots + \binom{100}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^{100-3} \right) \\ &= 1 - (0,006 + 0,031 + 0,081 + 0,14) \\ &= 1 - 0,258 \\ &= 0,742 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass mind. 4 Gepäckstücke fehlgeleitet werden, ist 74,2 %.

(2) ► **Formulieren des Ergebnisses des Alternativtests**

- Nullhypothese: $H_0 : p = 0,017$; Gegenhypothese $H_1 : p = 0,05$.
- Annahmebereich A und Ablehnungsbereich $\overline{A}$ der Nullhypothese: $A = \{1; 2; 3\}$ und $\overline{A} = \{4; 5; \ldots; 100\}$.

In der Stichprobe mit 100 Gepäckstücken ergaben sich insgesamt 4 fehlgeleitete Gepäckstücke. Da diese Anzahl im Ablehnungsbereich der Nullhypothese H_0 liegt, muss die Annahme verworfen werden, dass der ermittelte Anteil fehlgeleiteter Gepäckstücke 1,7 % beträgt. Es kann nun davon ausgegangen werden, dass 5 % aller Gepäckstücke fehlgeleitet werden (Annahme der Gegenhypothese H_1).

c) ► **Untersuchen, ob ein Gepäckstück mit 99 % W.-.keit nach max. 48 Std. am Zielflughafen ist**

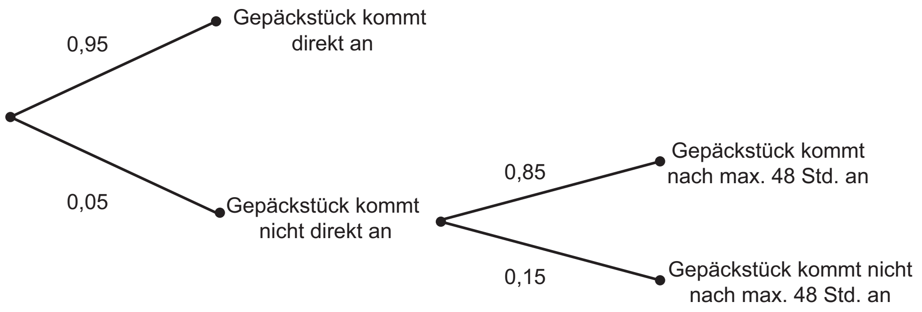
Die hier untersuchte Wahrscheinlichkeit $P(C)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gepäckstück nach höchstens 48 Stunden am Zielflughafen angekommen ist. Diese Wahrscheinlichkeit $P(C)$ umfasst wiederum zwei Teilereignisse:

1. Ereignis A: Gepäckstück kommt zeitgleich mit dem Passagier an.
2. Ereignis B: Gepäckstück kommt nicht zeitgleich mit dem Passagier an, aber befindet sich nach spätestens 48 Stunden am Zielflughafen.

Berechne also zuerst die Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse A und B und addiere diese anschließend um zu untersuchen, ob ein beliebiges Gepäckstück mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % nach spätestens 48 Stunden am Zielflughafen angekommen ist.
Beim Überprüfen bzw. Bestimmen der Wahrscheinlichkeit $P(C)$, kann dir ein Baumdiagramm hilfreich sein.

Untersuchen der Wahrscheinlichkeit:

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstück auf 5 % angestiegen ist.
Zugehöriges Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass ein Gepäckstück zeitgleich mit dem Passagier am Zielflughafen ankommt, kann dem Baumdiagramm direkt entnommen werden:
$P(A) = 0,95$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, dass ein Gepäckstück nach höchstens 48 Stunden am Zielflughafen ankommt, wird im Baumdiagramm mittels Pfadmultiplikation berechnet:
$P(B) = 0,05 \cdot 0,85 = 0,0425$

Addiere $P(A)$ und $P(B)$ um die Wahrscheinlichkeit $P(C)$ dafür zu berechnen, dass ein Gepäckstück nach höchstens 48 Stunden am Zielflughafen ankommt:

$P(C) = P(A) + P(B) = 0,95 + 0,0425 = 0,9925$

$\Longrightarrow$ Da die berechnete Wahrscheinlichkeit 99,25 % beträgt, wurde gezeigt, dass das Gepäckstück mit mindestens 99 %iger Wahrscheinlichkeit nach spätestens 48 Stunden am Zielflughafen ankommt.