Aufgabenstellung

Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \mathrm{e}^{ax}, \quad x \in \mathbb{R}$
mit einer positiven reelen Zahl a. Der Graph der Funktion $f_{0,5}$ ist unten dargestellt.

a) (1) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. (17P)

(2) Begründen Sie, dass $T_a\left(-\frac{1}{a} \mid -a^{-2}\mathrm{e}^{-1}\right)$ ein globaler Tiefpunkt der Funktion f_a ist.

b) In a) (1) ergibt sich der Wendepunkt $W_a\left(-\frac{2}{a} \mid -2a^{-2} \cdot \mathrm{e}^{-2}\right)$.

(1) Zeigen Sie: Für die Länge $l(a)$ der Strecke $\overline{T_aW_a}$ gilt $(l(a))^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4}$ mit $k = (\mathrm{e}-2)^2\mathrm{e}^{-4}$. (9P)

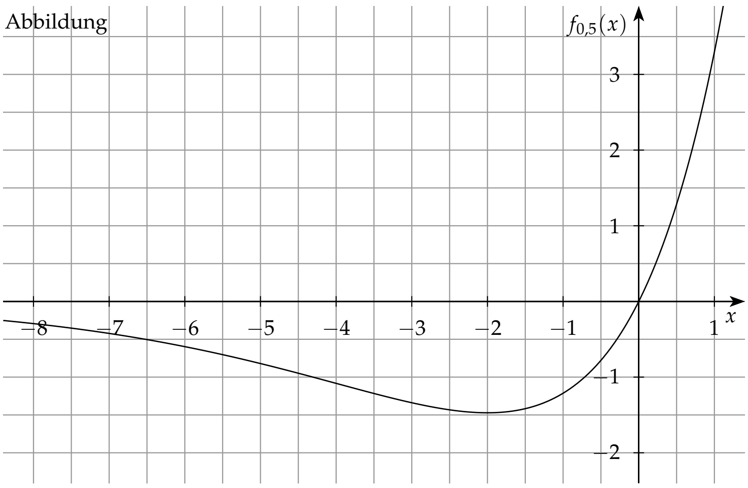
(2) Untersuchen Sie, ob die Länge $l(a)$ der Strecke $\overline{T_aW_a}$ extremal werden kann.
[Hinweis: Ohne Beweis kann benutzt werden: $l(a)$ ist genau dann extremal, wenn $(l(a))^2$ extremal ist.]

c) (1) Begründen Sie mit Hilfe von Integrationsverfahren, dass die Funktion F_a mit der Gleichung $F_a(x) = \frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax} \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f_a ist. (14P)

(2) Der Graph der Funktion f_a schließt mit der x-Achse im III. Quadranten eine unbegrenzte Fläche ein.
Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt $I_a = \frac{1}{a^3}$ besitzt.

d) (1) Es sei h die Funktion mit der Gleichung $h(x) = \mathrm{e}^x - x, \quad x \in \mathbb{R}$. (10P)
Beweisen Sie: Im Intervall $]0, \infty[$ ist die Funktion h streng monoton steigend und es gilt: $h(x) \geq 1$ für alle $x \geq 0$.

(2) Begründen Sie Mit Hilfe von d) (1): Die Normalparabel p mit der Gleichung $p(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, schneidet den Graphen der Funktion f_a nur im Ursprung.



Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.