Gegeben sind die Funktionen f unf g mit den Gleichungen $f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{x+1};\; x \in \mathbb{R}$
und $g(x) = -\frac{1}{2}x \cdot (e^{x+1} - x);\; x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f sei G_f, der Graph der Funktion g sei G_g.

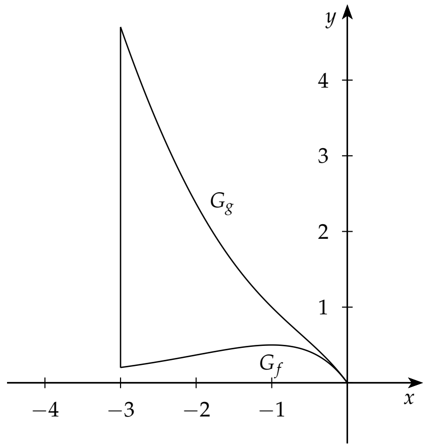
a) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an. (2P)

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes von G_f. (15P)
Der Graf G_f besitzt genau einen Wendepunkt W. Zeigen Sie, dass die Tangente in W parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = \frac{1}{2e}x$ verläuft.

c) Weisen Sie nach, dass der Koordinatenursprung O einziger gemeinsamer Punkt der Graphen G_f und G_g ist. (7P)
Zeigen Sie, dass G_f und G_g in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente besitzen.

d) Ein Spielzeughersteller möchte die Fläche, die die Graphen G_g und G_f mit der Geraden $x = -3$ einschließen, als Vorlage für den Bau von Lenkdrachen nutzen. Der Drachen ist symmetrisch, seine Symmetrieachse liegt auf der Geraden $x = -3$. (7P)
Berechnen Sie den Flächeninhalt eines solchen Drachens unter der Bedingung, dass ein Meter in der Realität drei Längeneinheiten in der rechts stehenden Skizze entspricht.

[Zur Kontrolle: $g(x) - f(x) = \frac{1}{2}x^2$]



e) Für eine in der Herstellung billigere Variante des Lenkdrachens soll ein Dreieck genutzt werden, das durch Spiegelung an der Geraden $x = -3$ die neue Drachenform ergibt. Eckpunkte dieses Dreiecks sind der Koordinatenursprung O, der Schnittpunkt des Graphen G_g mit der Geraden $x = -3$ sowie ein auf dieser Geraden liegender Punkt $Q(-3 \mid y_Q)$ mit $0 < y_Q < 2$. (9P)
Zeichnen Sie in der Anlage eine mögliche vollständige neue Drachenform ein. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q unter der Bedingung, dass der Flächeninhalt des neuen Lenkdrachens $1\,\text{m}^2$ beträgt ($1\,\text{m} = 3\,\text{LE}$).

(30P)

Anlage zu Aufgabe 1.2: Lenkdrachen