a) **► Funktionsgleichung von g bestimmen** (3P)

Der Graph von g ist eine **Parabel**, folglich ist g eine ganzrationale Funktion zweiten Grades. Du hast verschiedene Möglichkeiten, eine Funktionsgleichung zu bestimmen.

- Ansatz $g(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ (Produkt aus Linearfaktoren)
- Ansatz $g(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ (Scheitelpunktform)
- Ansatz $g(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform)

►► Lösungsweg A: Produkt aus Linearfaktoren

Eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades besitzt allgemein die Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, wobei x_1 und x_2 die **Nullstellen** von g sind.

Wähle dann einen weiteren Punkt, der auf dem Graphen von g liegt und setze dessen Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, um einen Wert für a zu bestimmen.

►► Lösungsweg B: Scheitelpunktform

Eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades besitzt allgemein die Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$, wobei $(x_S \mid y_S)$ die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel sind.

Wähle dann einen weiteren Punkt, der auf dem Graphen von g liegt und setze dessen Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, um einen Wert für a zu bestimmen.

►► Lösungsweg C: Normalform

Eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades besitzt allgemein die Funktionsgleichung $g(x) = ax^2 + bx + c$. Der Funktionsterm enthält drei Unbekannte. Du benötigst also die Koordinaten **dreier** Punkte, die auf dem Graphen von g liegen. Anschließend kannst du diese Punkte in die Funktionsgleichung von g einsetzen und erhältst ein lineares Gleichungssystem.

b) **► Gemeinsamen Punkt nachweisen** (4P)

Der Punkt $S_x(1 \mid 0)$ ist ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g, wenn er die Funktionsgleichung **beider** Funktionen erfüllt. Führe also eine Punktprobe durch. Setze dazu die Koordinaten von S nacheinander in die Funktionsgleichungen von f und g ein und untersuche, ob sich eine wahre Aussage ergibt.

► Weitere Schnittpunkte mit der x-Achse berechnen

Gesucht sind die Punkte, in denen der Graph von f die x-Achse schneidet. Die x-Koordinate dieser Schnittpunkt mit der x-Achse heißen **Nullstellen**.

Setze $f(x) = 0$, um die Nullstellen der Funktion f zu ermitteln. Du kannst diese Gleichung mit deinem CAS lösen.

c) **► Koordinaten der lokalen Extrempunkte berechnen** (9P)

Du sollst die lokalen Extrempunkte des Graphen von f bestimmen.

Dazu kannst du so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die ersten beiden Ableitungen f' und f'' mit deinem CAS.
- Notwendiges Kriterium: Setze $f'(x) = 0$ und löse die Gleichung auf. So erhältst du die potentiellen Extremstellen.
- Hinreichendes Kriterium: Setze die potentiellen Extremstellen in die zweite Ableitung f'' ein. Wenn sich ein positiver Wert ergibt, so liegt ein Minimum vor; wenn sich ein negativer Wert ergibt, dann liegt ein Maximum vor.
- Setze die Extremstellen zuletzt in die Funktionsgleichung von f ein und berechne so die zugehörigen y-Koordinaten.

▶ Graph von f in Anlage einzeichnen

Bisher hast du bereits einige wichtige Punkte des Graphen von f berechnet oder gegeben, nämlich:

- die Schnittpunkte mit der x-Achse $S_x(1 \mid 0)$, $N_1\,(3 \mid 0)$, $N_2\,(0 \mid 0)$,
- den Hochpunkt $H(2{,}2 \mid 2{,}1)$ und den Tiefpunkt $T(0{,}5 \mid -0{,}6)$.

Zeichne diese Punkte ein. Du weißt, dass es sich bei f um eine Funktion dritten Grades handelt. Wenn du möchtest, kannst du auch eine Wertetabelle anfertigen und somit noch weitere Punkte des Graphen berechnen.

d) **▶ Länge des Sees berechnen** (6P)

Der See entspricht der Fläche, welche von den Graphen von f und g für $1 \leq x \leq 3$ eingeschlossen wird. Der nördlichste Punkt des Sees ist gerade der Hochpunkt H des Graphen von f. Der südlichste Punkt ist der Scheitelpunkt S des Graphen von g. Seine Koordinaten $S\,(2 \mid -0{,}5)$ kannst du direkt aus der Abbildung ablesen.

Gesucht ist der **Abstand** dieser beiden Punkte. Für den Abstand d zweier Punkte $P(p_1 \mid p_2)$ und $Q(q_1 \mid q_2)$ gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$.

▶ Größe der Seefläche berechnen

Die Größe der Seefläche entspricht der Größe der Fläche, die von den Graphen von f und g für $1 \leq x \leq 3$ vollständig eingeschlossen wird. Den Inhalt dieser Fläche kannst du mithilfe der Integralrechnung bestimmen.

Für den Inhalt A einer Fläche, welche von den Graphen zweier Funktionen f und g in den Grenzen a und b eingeschlossen wird, gilt:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

Im gesamten Intervall verläuft der Graph von f oberhalb des Graphen von g.

e) **▶ Koordinaten des Wendepunkts ermitteln** (14P)

Zunächst sollen die Koordinaten des Wendepunkts W des Graphen von f ermittelt werden. Du weißt aus der Aufgabenstellung, dass der Graph von f **genau einen** Wendepunkt besitzt. Das bedeutet: Bei der Berechnung des Wendepunkts kannst du auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung verzichten, weil bereits vorausgesetzt wird, dass tatsächlich ein Wendepunkt existiert.

Du kannst so vorgehen:

- Das notwendige Kriterium für eine Wendestelle x_W lautet: $f''(x_W) = 0$. Setze also $f''(x) = 0$ und löse diese Gleichung mit dem `solve`-Befehl. Die Lösung ist die Wendestelle von f.
- Setze x_W ein in $f(x)$ und berechne so die y-Koordinate des Wendepunkts.

▶ Gleichung für den Straßenverlauf bestimmen und diesen einzeichnen

In der Aufgabenstellung wird der Straßenverlauf beschrieben:

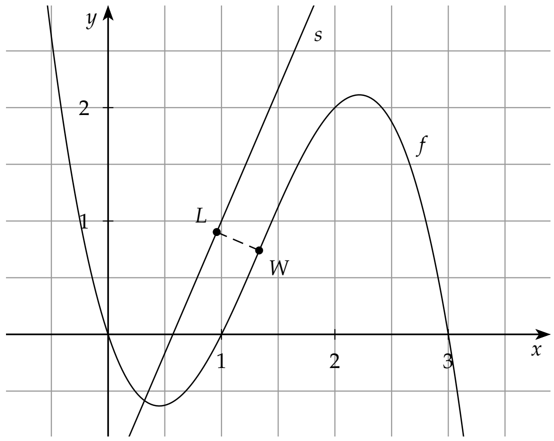
- Es handelt sich um eine **geradlinige** Straße, also kann sie durch eine **Gerade** beschrieben werden.
- Sie verläuft durch den Punkt $P\,(1 \mid 1)$.
- Die Straße verläuft **parallel zur Wendetangente** des Graphen von f.

Wir wollen Funktion, welche den Straßenverlauf modelliert, mit s bezeichnen.
Aus jedem der drei Punkte kannst du wichtige Informationen entnehmen. Da die Straße als Gerade beschrieben werden kann, lautet ihre allgemeine Funktionsgleichung $s(x) = m \cdot x + b$, wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt der Geraden sind.
Weiterhin weißt du, dass die Gerade **parallel** zur Wendetangente des Graphen von f verläuft. Zwei Geraden verlaufen parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben. Damit weißt du: Die Gerade s des Straßenverlaufs hat die **gleiche Steigung** wie die Wendetangente des Graphen von f.

Du kannst also so vorgehen:

- Berechne zunächst die Steigung der Wendetangente von f. Dabei gilt: Die Steigung einer Tangente ist immer gleich der Steigung der Funktion im Berührpunkt.
- Die Gerade s verläuft parallel zur Wendetangente und hat somit die gleiche Steigung. Setze also m in die Geradengleichung von s ein.
- Berechne zuletzt b. Du weißt, dass s durch den Punkt $P(1 \mid 1)$ verläuft. Setze die Koordinaten von P in die Geradengleichung von s ein und löse nach b auf.
- Zeichne die Gerade zuletzt in die Anlage ein.

▶ Entfernung des Wendepunktes von der Straße berechnen



Du sollst die Entfernung des Wendepunkts W von der Straße berechnen, d.h. von der Geraden s. Mit „Entfernung" ist dabei der **kleinste Abstand** gemeint. Betrachte die gegenseitige Lage von Wendepunkt und der Geraden: Es gibt genau einen Punkt auf der Geraden s, welcher vom Punkt W den kleinsten Abstand besitzt. Wir haben ihn links in der Zeichnung mit L bezeichnet. Die Entfernung von W zur Geraden s ist gleich dem Abstand der Punkte W und L.

Überlege also, wie du die Koordinaten von L bestimmen kannst. Jeder Punkt auf der Geraden s hat allgemein die Koordinaten $L(s \mid s(x))$, d.h. $L\left(x \mid \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}\right)$. Gesucht ist der Punkt L, der den kürzesten Abstand zu Punkt W hat. Für den Abstand d zweier Punkte $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$ gilt allgemein

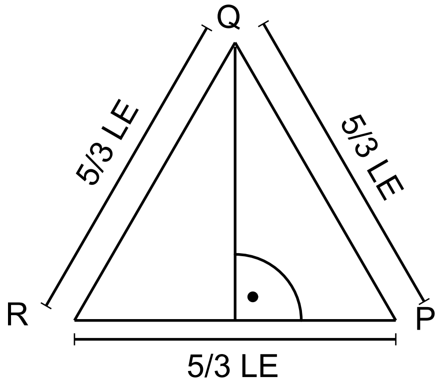
$$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Du kannst so vorgehen:

- Setze die allgemeinen Koordinaten von L und die Koordinaten von W in die Gleichung zur Berechnung des Abstands ein. Du erhältst als Ergebnis einen **Term**, der von x abhängig ist und der dir den Abstand der beiden Punkte in Abhängigkeit von x angibt.
- L soll der Punkt sein, an dem der Abstand minimal wird. Berechne also das **Minimum** des Abstands. Fasse dazu den Term, den du eben berechnet hast, als Funktionsterm $d(x)$ einer Funktion d auf und berechne das Minimum x_M dieser Funktion.
- Setze zuletzt x_M in die Funktion d ein und berechne so den Abstand von W zu L. Dies ist auch der Abstand von W zur Geraden s.

f) ### ▶ Koordinaten der Punkte berechnen (4P)

Der Punkt $P\,(3 \mid 0)$ liegt auf der x-Achse. Gemeinsam mit zwei anderen Punkten Q und R soll er ein gleichseitiges Dreieck bilden. Folgendes ist bekannt:



- Der Kurs soll insgesamt 5 km lang sein. Er entspricht dem **Umfang** des gleichseitigen Dreiecks. Jede Seite ist also $\frac{5}{3}$ km lang.
- Eine der Bahnen verläuft in Ost-West-Richtung und liegt damit direkt auf der x-Achse. Deshalb liegt auch ein zweiter Punkt des Dreiecks auf der x-Achse.