1. Zu Beginn der Aufgabe wird der Term der Funktion f mit $f(x) = x \cdot ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$ in seiner Entstehung aus den Grundelementen untersucht.

1.1 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $ln(x)$ und $ln\left(x^2\right)$ qualitativ korrekt in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Beschreiben und begründen Sie die Veränderungen, die durch das Quadrat im Argument hervorgerufen werden. (5P)

1.2 Bestimmen Sie die Parameterwerte a, für die $ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$ definiert ist. (2P)

1.3 Zeigen Sie allgemein: Wenn der Graph einer Funktion g mit dem Definitionsbereich D_g achsensymmetrisch zur y-Achse ist, dann ist der Graph der Funktion h mit $h(x) = x \cdot g(x)$ auf D_g punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. (2P)

1.4 Untersuchen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot ln\left(x^2\right)\right)$ unter Verwendung der Information: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot ln \mid x \mid\right) = 0.$ (3P)

2. In den folgenden Aufgaben geht es für Parameterwerte $a > 0$ um die Funktionenschar $f_a(x) = \begin{cases} x \cdot ln\left(\frac{x^2}{a}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .Den Verlauf einiger Graphen der Schar sehen Sie im Material.

2.1 Bestimmen Sie die Parameterwerte zu den im Material gezeichneten Graphen. (3P)

2.2 Berechnen Sie den Parameterwert der Funktion f_a , deren Graph durch den Punkt $E(1 \mid 1)$ läuft. Zeigen Sie, dass durch jeden Punkt $P(p \mid q)$ der Ebene, der nicht auf der y-Achse liegt, genau ein Graph der Funktionenschar verläuft. (8P)

2.3 Begründen Sie rechnerisch, dass jeder Funktionsgraph der Schar genau zwei Extrempunkte besitzt. Diese Extrempunkte bilden zusammen den Graphen einer Funktion (Ortskurve der Extrempunkte). (10P)
Bestimmen Sie den Term dieser Funktion und ihren Definitionsbereich.

2.4 Es gilt $\int \mathrm{x} \cdot ln\left(\frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot ln\left(\frac{x^2}{a}\right) - \frac{1}{2}x^2 + C, C \in \mathbb{R}.$ (7P)
Berechnen Sie damit den Inhalt der Fläche, den der Graph von f_9 mit der x-Achse einschließt.

Material