Hinweis

Die Oktaederaufgabe Nummer 6 stand nach dem Abitur 2008 in NRW als eine von mehreren stark unter Kritik, da sie gemeinhin als **zu schwer** für den Grundkurs erachtet wurde. Sie war auch mit ein Grund dafür, dass die Prüfung nach dem Abitur daher wiederholt werden konnte.

$A(13\,|\,-5\,|\,3),\ B(11\,|\,3\,|\,1),\ C(5\,|\,3\,|\,7),\ S_1(13\,|\,1\,|\,9)$

a) **Begründung, dass die Punkte ein Dreieck wie beschrieben bilden** (8VP)

Das Dreieck ist zunächst **gleichschenklig**, wenn mindestens zwei der drei Seiten gleich lang sind. Um dies zu überprüfen, werden die Seitenlängen über die Beträge der entsprechenden Vektoren gebildet:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 11-13 \\ 3-(-5) \\ 1-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+8^2+(-2)^2} = \sqrt{72}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 5-13 \\ 3-(-5) \\ 7-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-8)^2+8^2+4^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 5-11 \\ 3-3 \\ 7-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+0^2+6^2} = \sqrt{72}$$

Da die Seiten $[AB]$ und $[BC]$ gleich lang sind, ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Basis $[AC]$.

Nun ist noch nachzuweisen, dass das Dreieck einen rechten Winkel hat. Da das Dreieck bereits gleichschenklig ist, kann sich dieser rechte Winkel nur zwischen den beiden Katheten befinden, die gleich lang sind!

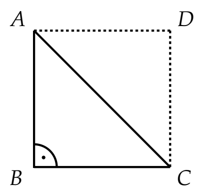
Um diesen Winkel zwischen $[AB]$ und $[BC]$ nachzuweisen, reicht es aus zu zeigen, dass das Skalarprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ gleich Null ist:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-6) + 8 \cdot 0 - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0$$

Damit ist nachgewiesen, dass das Dreieck einen rechten Winkel besitzt.

Berechnung der Koordinaten des Punktes D

Da sich durch die Ergänzung zum Quadrat sowohl gleich lange als auch parallele Seiten ergeben müssen, lässt sich der Ortsvektor von D als Vektorkette mit $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$ oder auch $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$ darstellen. Mit dem ersten Ansatz ergibt sich beispielsweise:



$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(7\,|\,-5\,|\,9)$$

Mit dem zweiten Ansatz ergibt sich dasselbe Ergebnis.

Der Punkt D hat die Koordinaten $D(7\,|-5\,|\,9)$.

b) **Bestimmung der Ebenengleichung** (7VP)

Um die Ebene E aufzustellen, in der das Quadrat $ABCD$ liegt, werden lediglich drei der vier Quadratpunkte benötigt, z.B. A, B und C. Für E ergibt sich mit diesen drei Punkten in Parameterform:

$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\8\\4\end{pmatrix}$$

Die typischste Methode, um nun die Koordinatenform von E zu bestimmen wäre nun, die Parameterform von E in ein LGS zu schreiben:

I $\quad x_1 = 13 - 2r - 8s$
II $\quad x_2 = -5 + 8r + 8s$
III $\quad x_3 = 3 - 2r + 4s$

Nun werden entsprechende Gleichungen addiert, um letztlich eine parameterfreie Form zu erhalten. Dies führt beispielsweise auf:

Ia $\quad x_1 + x_2 = 8 + 6r \quad (\mathrm{I} + \mathrm{II})$
IIa $\quad x_1 + 2x_3 = 19 - 6r \quad (\mathrm{I} + 2\mathrm{III})$

Werden diese beiden Gleichungen wiederum addiert, ergibt sich letztlich eine parameterfreie Koordinatengleichung:

Ia + IIa $\quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 27$

Dies wäre eine Koordinatengleichung von E.

Alternativer Lösungsweg

Falls Sie in Ihrem Kurs auch den Normalenvektor von E und die entsprechende Normalenform einer Ebene besprochen haben, lässt sich eine Koordinatengleichung von E auch so bestimmen:

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ muss zu beiden Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ senkrecht stehen, das Skalarprodukt dieser Vektoren muss also stets Null ergeben. Es ergeben sich dadurch zwei Gleichungen:

I $\quad -2n_1 + 8n_2 - 2n_3 = 0$
II $\quad -8n_1 + 8n_2 + 4n_3 = 0$

Wird die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, so ergibt sich:

IIa $\quad -6n_1 + 6n_3 = 0 \quad (\mathrm{II} - \mathrm{I})$

$$-6n_1 = -6n_3$$
$$n_1 = n_3$$

Nun kann für einen der drei Koordinaten ein (einfacher) Wert gewählt werden. Wird z.B. $n_1 = 2$ gesetzt, so ergibt sich auch $n_3 = 2$ und aus eine der beiden ersten Gleichungen letztlich $n_2 = 1$.

Ein Normalenvektor der Ebene ist somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ der Ebene ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \left[\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right] &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - (2 \cdot 13 + 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3) &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 27 &= 0 \end{aligned}$$

c) **Bestimmung der Koordinaten des Punktes S_2** (11VP)

Um den Spiegelpunkt S_2 zu bestimmen, muss zunächst eine Lotgerade ℓ aufgestellt werden, die senkrecht zur Ebene verläuft und den Punkt S_1 enthält. Der Schnittpunkt von ℓ mit der Ebenen ergibt den Lotfußpunkt L.

Der Spiegelpunkt S_2 ergibt sich aus der Eigenschaft, dass er von S_1 doppelt so weit weg liegen muss wie der Lotfußpunkt.

Da die Lotgerade senkrecht zu E verläuft, entspricht der Normalenvektor von E genau ihrem Richtingsvektor. Da sie weiterhin durch den Punkt S_1 verläuft, ergibt sich für sie:

$$\ell\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + t \cdot \vec{n}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

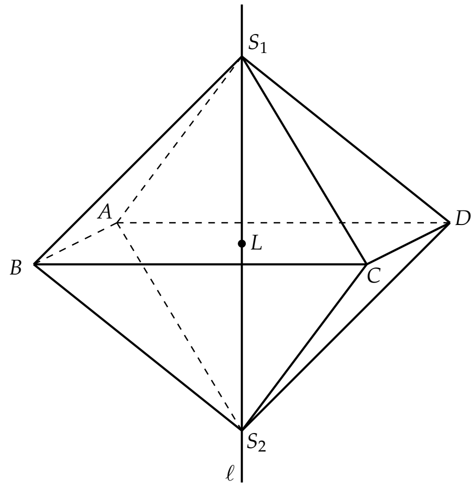
Durch Einsetzen der Koordinaten von ℓ in die Ebenengleichung ergibt sich der t-Wert für den Ortsvektor des Schnitt- und Lotfußpunkts L:

$$\begin{aligned} \ell \cap E: \quad 2(13 + 2t) + (1 + t) + 2(9 + 2t) &= 27 \\ 26 + 4t + 1 + t + 18 + 4t &= 27 \\ 9t &= -18 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Für $t = -2$ ergibt sich somit der Ortsvektor von L auf der Geraden:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad L(9 \mid -1 \mid 5)$



Da der gesuchte Punkt S_2 nun doppelt so weit von S_1 weg liegt wie L, ergibt sich mit einer Vektorkette für seinen Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OS_1} + 2 \cdot \overrightarrow{S_1L}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad S_2(5 \mid -3 \mid 1)$

Der Ortsvektor lässt sich auch anders berechnen, indem man sich klarmacht, wie die drei Punkte auf der Geraden ℓ liegen. Zum Punkt S_1 gehört nämlich der Parameterwert $t = 0$, zum Punkt L der Parameterwert $t = -2$ (wie wir oben berechnet haben). Da der Punkt S_2 nun doppelt von S_1 so weit weg liegen muss wie L, muss ihm der Parameterwert -4 zugeordnet werden!

Einsetzen des Parameterwerts -4 in die Geradengleichung von g ergibt auch dasselbe Ergebnis für S_2.

Begründung, dass der Körper ein Oktaeder ist

Wie in der Aufgabenstellung angegeben ist, ist ein Oktaeder ein Vieleck (Polyeder), dessen Oberfläche aus acht **kongruenten gleichseitigen** Dreiecken besteht. Um dies zu überprüfen, werden zunächst die Kantenlängen des Oktaeders von S_1 zu den Quadratpunkten A, B, C und D berechnet:

$$\overline{AS_1} = |\overrightarrow{AS_1}| = \left| \begin{pmatrix} 13-13 \\ 1-(-5) \\ 9-3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2+6^2+6^2} = \sqrt{72}$$

$$\overline{BS_1} = |\overrightarrow{BS_1}| = \left| \begin{pmatrix} 13-11 \\ 1-3 \\ 9-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+8^2} = \sqrt{72}$$

$$\overline{CS_1} = |\overrightarrow{CS_1}| = \left| \begin{pmatrix} 13-5 \\ 1-3 \\ 9-7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{72}$$

$$\overline{DS_1} = |\overrightarrow{DS_1}| = \left| \begin{pmatrix} 13-7 \\ 1-(-5) \\ 9-9 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2+6^2+0^2} = \sqrt{72}$$

Wie die Berechnung zeigt, sind alle vier Kanten gleich lang. Wegen der Symmetrie muss dies auch für die Kanten vom Punkt S_2 zu A, B, C und D gelten.

Weiterhin wurde in Teilaufgabe a) bereits gezeigt, dass das Quadrat ebenfalls eine Seitenlänge von $\sqrt{72}$ haben. Damit sind alle Kanten des Polyeders gleich lang, seine Oberfläche besteht somit aus 8 kongruenten (gleichen) gleichseitigen Dreiecken. Der Körper ist ein Oktaeder.

Alternativer Lösungsweg (nicht ausführlich)

Es kann gezeigt werden, dass der Lotfußpunkt L der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$ ist – die entsprechende Pyramide $ABCDS_1$ ist damit **gerade** und alle Schenkel gleich lang. Die Schenkellänge lässt sich wie oben über z.B. $\overline{AS_1} = \sqrt{72}$ berechnen. Wegen der Symmetrie ist auch die Pyramide $ABCDS_2$ gerade und gleich groß. Da das Quadrat ebenfalls eine Kantenlänge von $\sqrt{72}$ aufweist, sind bei dem Körper somit alle Kanten gleich lang und er damit ein Oktaeder.

d) **Bestimmung der Koordinaten der Eckpunkte P_6 und P_8** (10VP)

Die Koordinaten dieser beiden Eckpunkte können ebenfalls über eine Vektorkette berechnet werden, allerdings gestaltet es sich hier schwerer, einen geeigneten Ansatz zu finden.

Zum Punkt P_6 gelangt man beispielsweise vom Punkt C aus: Zunächst wird senkrecht nach oben gegangen bis zur Würfelkante (entspricht der halben Strecke $\overline{S_2S_1}$) und danach weiter bis zum gesuchten Punkt P_6 (entspricht der halben Strecke $\overline{DB}$). Es ergibt sich:

$$\overrightarrow{OP_6} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{S_2S_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13-5 \\ 1-(-3) \\ 9-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11-7 \\ 3-(-5) \\ 1-9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad P_6(11\,|\,9\,|\,7)$

Zum Punkt P_8 gelangt man auf ähnliche Weise vom Punkt A aus: Zunächst geht man wiederum senkrecht nach oben bis zur Würfelkante (entspricht der halben Streche $\overline{S_2S_1}$) und danach weiter bis zum gesuchten Punkt P_8 (entspricht der halben Strecke $\overline{BD}$):

$$\overrightarrow{OP_8} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{S_2S_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 13-5 \\ 1-(-3) \\ 9-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7-11 \\ -5-3 \\ 9-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad P_8(15\,|-7\,|\,11)$

Die beiden Eckpunkte haben die Koordinaten $P_6(11\,|\,9\,|\,7)$ sowie $P_8(15\,|-7\,|\,11)$.

e) **Berechnung des Volumens der abgeschnittenen Pyramide** (14VP)

Für das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h gilt allgemein $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Die „große“ Pyramide $ABCDS_1$ hat als Grundfläche das Quadrat $ABCD$, das eine Seitenlänge von $a = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{72}$ und eine Höhe von

$$h = |\overrightarrow{LS_1}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Die Schenkelllänge der gesuchten kleinen Pyramide beträgt genau **ein Drittel** der Schenkellänge der großen Pyramide. Nach dem **Strahlensatz** gilt dabei, dass ihre Seitenlängen ihrer Grundfläche auch **genau ein Drittel so lang sind, wie die Seitenlänge der großen Pyramide**. Dies gilt auch für die Höhe.

Die kleine Pyramide hat damit eine Grundseite mit Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{3}\sqrt{72}$ sowie eine Höhe von $h = \frac{1}{2} \cdot 6 = 2$.

Für ihre Grundseite ergibt sich damit:

$$G = a_1^2 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{72}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 72 = 8$$

Nach der obigen Volumenformel gilt für das Volumen der Pyramide dann:

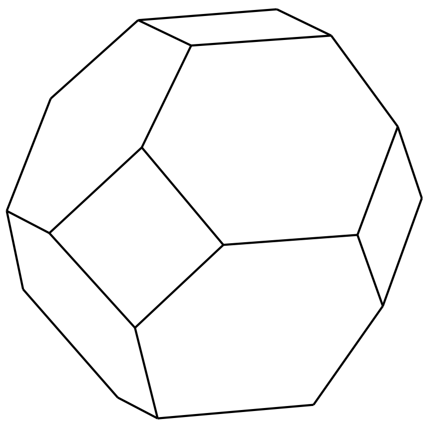
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \frac{16}{3}$$

Die kleine Pyramide hat ein Volumen von $\frac{16}{3}$ VE.

Beschreibung des Restkörpers R_k

Werden alle acht Ecken des Oktaeders abgeschnitten, entsteht ein **abgestumpftes Oktaeder**, das einem Fußball sehr ähnlich sieht.

Mit $k = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AS_1}|$ ergibt sich (mithilfe einer Zeichung), dass der Restkörper an den Schnittflächen jeweils eine **quadratische** Seitenfläche aufweist. Da der Oktaeder vorher 6 Ecken hatte, gibt es somit beim Restkörper 6 quadratische Seitenflächen. Die restlichen 8 Seitenflächen entsprechen gleichseitigen **Sechsecken**.



Mit $k = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AS_1}|$ werden die 8 quadratischen Seitenflächen so groß, dass die 8 gleichseitigen Sechsecke jeweils zu gleichseitigen **Dreiecken** reduziert werden. Dieser Restkörper besteht somit aus 6 quadratischen Seitenflächen sowie 8 gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen.
Ein Restkörper wie dieser wird **Kuboktaeder** genannt.