a) **▶ Definitionsbereich bestimmen** (20BE)

Im Zähler der Funktion steht der Ausdruck $\ln x$. In einer Logarithmus-Funktion können immer nur positive Zahlen für x eingesetzt werden. Zudem steht x im Nenner der Funktion. Da im Nenner nie eine 0 stehen darf ist die 0 im Definitionsbereich ausgeschlossen. Der Definitionsbereich lautet somit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$.

▶ Anstieg der Graphen G_a ermitteln

Zunächst müssen die Schnittpunkte mit der x-Achse berechnet werden. $\Longrightarrow y = 0$.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{\ln x + a}{x} &= 0 && \mid \cdot x \\ 3 \cdot (\ln x + a) &= 0 && \mid : 3 \\ \ln x + a &= 0 && \mid -a \\ \ln x &= -a \\ \mathrm{e}^{\ln x} &= \mathrm{e}^{-a} \\ x &= \mathrm{e}^{-a} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Der Schnittpunkt mit der x-Achse lautet $S\left(\mathrm{e}^{-a} \mid 0\right)$.

Um die Steigung zu berechnen benötigen wir die erste Ableitung der Funktion f_a. Zum Ableiten bietet sich hier die Quotientenregel an.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(u'(x) \cdot v(x)) - (u(x) \cdot v'(x))}{(v(x))^2}$$

$$u = \ln x + a \qquad u' = \frac{1}{x} \qquad v = x \qquad v' = 1$$

$$f_a'(x) = 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) - ((\ln x + a) \cdot 1)}{x^2} = 3 \cdot \frac{1 - \ln x - a}{x^2}$$

Um die Steigung im Punkt $S\left(\mathrm{e}^{-a} \mid 0\right)$ berechnen zu können, setzen wir $x = \mathrm{e}^{-a}$ in die erste Ableitung ein.

$$f_a'\left(\mathrm{e}^{-a}\right) = 3 \cdot \frac{1 - \ln \mathrm{e}^{-a} - a}{\left(\mathrm{e}^{-a}\right)^2} = 3 \cdot \frac{1 - (-a) - a}{\mathrm{e}^{-2a}} = \frac{3}{\mathrm{e}^{-2a}} = 3\mathrm{e}^{2a}$$

Der Anstieg im Schnittpunkt mit der x-Achse beträgt $3\mathrm{e}^{2a}$.

▶ Hochpunkte zeigen

Um die Hochpunkte berechnen zu können müssen folgende Bedingungen erfüllt sein.

1. Bedingung $f_a'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1 - \ln x - a}{x^2} &= 0 && \mid : 3 \\ \frac{1 - \ln x - a}{x^2} &= 0 && \mid \cdot x^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1-\ln x-a &= 0 \qquad \mid +a-1\\
-\ln x &= a-1 \qquad \mid \cdot(-1)\\
\ln x &= 1-a \qquad \mid e\\
\mathrm{e}^{\ln x} &= \mathrm{e}^{1-a}\\
x &= \mathrm{e}^{1-a}
\end{aligned}
$$

2. Bedingung $f_a''(x)<0$
Auch bei der zweiten Ableitung bietet sich erneut die Quotientenregel an.

$f_a'(x)=3\cdot\dfrac{1-\ln x-a}{x^2}$

$u=1-\ln x-a \qquad u'=-\dfrac{1}{x} \qquad v=x^2 \qquad v'=2x$

$$
\begin{aligned}
f_a''(x) &= 3\cdot\frac{\left(-\frac{1}{x}\cdot x^2\right)-((1-\ln x-a)\cdot 2x)}{x^4}\\
&= 3\cdot\frac{-x-(2x-2x\ \ln x-2ax)}{x^4}\\
&= 3\cdot\frac{-x-2x+2x\ \ln x+2ax}{x^4}\\
&= 3\cdot\frac{-3x+2x\ \ln x+2ax}{x^4}\\
&= 3\cdot\frac{-3+2\ \ln x+2a}{x^3}
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $x=\mathrm{e}^{1-a}$ in die zweite Ableitung

$$
\begin{aligned}
f_a''\left(\mathrm{e}^{1-a}\right) &= 3\cdot\frac{-3+2\ \ln \mathrm{e}^{1-a}+2a}{\left(\mathrm{e}^{1-a}\right)^3}\\
&= 3\cdot\frac{-3+2\cdot(1-a)+2a}{\left(\mathrm{e}^{1-a}\right)^3}\\
&= 3\cdot\frac{-3+2-2a+2a}{\left(\mathrm{e}^{1-a}\right)^3}\\
&= \frac{-3}{\left(\mathrm{e}^{1-a}\right)^3}<0
\end{aligned}
$$

Somit ist bewiesen, dass die Punkte $H_a\left(\mathrm{e}^{1-a}\mid f_a\left(\mathrm{e}^{1-a}\right)\right)$ Hochpunkte sind.

► Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte ermitteln

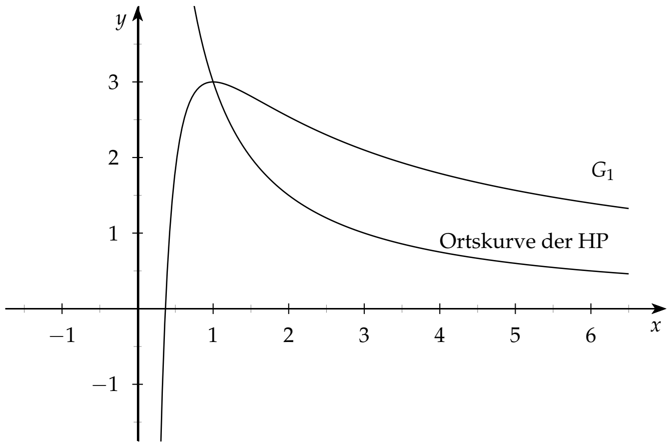
Zunächst berechnen wir den Hochpunkt in Abhängigkeit von a. Diesen erhält man durch Einsetzen von $x=\mathrm{e}^{1-a}$ in f_a.

$f_a\left(\mathrm{e}^{1-a}\right)=3\cdot\dfrac{1-a+a}{\mathrm{e}^{1-a}}=3\cdot\dfrac{3}{\mathrm{e}^{1-a}}$

Der Hochpunkt lautet somit $H_a\left(\mathrm{e}^{1-a}\mid\dfrac{3}{\mathrm{e}^{1-a}}\right)$.

Die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte erhalten wir, indem wir $x=\mathrm{e}^{1-a}$ in $y=\dfrac{3}{\mathrm{e}^{1-a}}$ einsetzen. Die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte beträgt somit $y=\dfrac{3}{x}$.

▶ Abbildung ergänzen



b) **▶ Schritte zum Ermitteln des Wertebereichs nennen** (4BE)

- auf lokale Extrempunkte untersuchen
- auf globale Extrempunkte untersuchen
- auf Stetigkeiten untersuchen
- auf das Verhalten an Intervallenden untersuchen

c) **▶ Stammfunktion nachweisen** (6BE)

Um zu beweisen, dass die Funktion $F_1(x) = 1{,}5 \cdot (\ln x)^2 + 3 \cdot \ln x$ die Stammfunktion von f_1 ist, leiten wir die Stammfunktion F_1 ab.

$$F_1(x) = 1{,}5 \cdot (\ln x)^2 + 3 \cdot \ln x$$

$$F_1'(x) = 1{,}5 \cdot 2 \cdot \ln x + 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ \ln x}{x} + \frac{3}{x} = \frac{3\ \ln x + 3}{x} = 3 \cdot \frac{\ln x + 1}{x} = f_1(x)$$

▶ Maßzahl des Flächeninhaltes berechnen

Die Stammfunktion von f_1 ist mit $F_1(x) = 1{,}5 \cdot (\ln x)^2 + 3 \cdot \ln x$ bereits gegeben. Zur Berechnung des Flächeninhalts benötigen wir jedoch noch die Stammfunktion von der Ortskurve der Hochpunkte.

$$\int_1^6 \left(\frac{3}{x}\right) dx = [3\ \ln x]_1^6$$

Der umschlossene Flächeninhalt lässt sich durch die Differenz der beiden Stammfunktionen berechnen.

$$A = \Big[1{,}5 \cdot (\ln x)^2 + 3 \cdot \ln x - 3 \cdot\ \ln x\Big]_1^6 = \Big[1{,}5 \cdot (\ln x)^2\Big]_1^6 = 1{,}5 \cdot (\ln 6)^2 - 1{,}5 \cdot (\ln 1)^2$$

$$= 1{,}5 \cdot (\ln 6)^2 - 1{,}5 \cdot 0^2 = 1{,}5 \cdot (\ln 6)^2 \approx 4{,}82$$

Die Maßzahl des Flächeninhalts beträgt $4{,}82$.