a) (1) ▶ **Angeben des größtmögliche Definitionsbereichs** (3BE)

Funktion f ist für alle x - Werte definiert, für die der Nenner des Funktionsterms ungleich null ist.

$\Longrightarrow$ $\mathbb{D}_f = \{x | x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 1\}$.

(2) ▶ **Ermitteln der Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f**

Untersuche den Graphen von f hier auf waagrechte, schiefe und senkrechte Asymptoten.
Besitzt der Graph der gebrochenrationalen Funktion f Definitionslücken, bzw. Polstellen, so besitzt dieser bei jenen Stellen senkrechte Asymptoten. Betrachte zum Untersuchen des Graphen der Funktion f auf Polstellen deren Nennerfunktion N. Besitzt N dabei Nullstellen, so besitzt der Graph von f bei diesen Nullstelle senkrechte Asymptoten.

Ist der Grad der Zählerfunktion um eins größer als der Grad der Nennerfunktion, so besitzt der Graph einer gebrochenrationalen Funktion eine schiefe Asymptote. Da dies hier der Fall ist, suchen wir die Funktionsgleichung der schiefen Asymptoten a_2 an den Graphen von f.
Die Gleichung der schiefen Asymptoten an den Graphen von f bestimmst du mittels Polynomdivision und anschließender Grenzwertbetrachtung.

Gleichung der senkrechten Asymptoten a_1

Nullstellen der Nennerfunktion N:

$0 = N(x) = x - 1 \iff x = 1$

Da für die Zählerfunktion bei $x = 1$
$Z(1) = 1^2 + 1 = 2 \neq 0$
gilt, besitzt der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit dieser Funktionsgleichung:

$a_1 : x = 1$.

Gleichung der schiefen Asymptoten a_2

Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = \left(x^2 \quad +1\right) : \left(x-1\right) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$
$$\begin{array}{r} -x^2 + x \\ \hline x + 1 \\ -x + 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

Grenzwertbetrachtung des Rests aus der Polynomdivision für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{x}_{\to\infty} + 1 + \underbrace{\frac{2}{x-1}}_{\to 0} \right) \to \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{x}_{\to-\infty} + 1 + \underbrace{\frac{2}{x-1}}_{\to 0} \right) \to -\infty$$

Da der gebrochenrationale Teil des Rests der Polynomdivision für $x \to \pm\infty$ gegen Null strebt, ist dies die Gleichung der schiefen Asymptoten a_2:

$a_2 = x + 1$.

(3) ▶ **Bestimmen einer Stammfunktion von f durch Punkt P**

Bilde zum Bestimmen der Stammfunktion F_c von f das unbestimmte Integral über f. Hilfreich ist es hier, wenn du beim Integrieren den Rest aus der obigen Polynomdivision als Funktionsterm von f verwendest, da dieser leichter aufzuleiten ist.

$$F_c(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot x^2 + x + 2\cdot \ln|x-1| + c$$

Setze zum Bestimmen der Stammfunktion, deren Graph durch den Punkt P verlaufen soll, die Koordinaten von P in die oben bestimmte Stammfunktion ein und bestimme somit die zugehörige Integrationskonstante:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\cdot x^2 + x + 2\cdot\ln|x-1| + c \\ 2012 &= \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2 + 2\cdot\ln|2-1| + c \\ 2012 &= 4 + c \iff c = 2008 \end{aligned}$$

Die gesuchte Stammfunktion ist:

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot x^2 + x + 2\cdot\ln|x-1| + 2008$$

b) ▶ **Bestimmen eines Wertes für a so, dass sich die Graphen der beiden Funktionen berühren** (3BE)

Bevor du damit anfängst diese Aufgabe zu lösen, solltest du dir vor Augen führen, welche Bedingungen an einer Berührstelle erfüllt sein müssen.

Die Graphen der Funktionen f und g müssen an einer Berührstelle B

- einen gemeinsamen Punkt besitzen.
- die gleiche Steigung besitzen.

Es muss also gelten für eine Berührstelle bei x_B:
$f(x_B) = g_a(x_B)$ und $f'(x_B) = g_a'(x_B)$

Es entsteht also folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad f(x_B) = g_a(x_B) \\ &\qquad \sin x = a + \cos x \\ &\text{II} \quad f'(x_B) = g_a'(x_B) \\ &\qquad \cos x = -\sin x \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

▸▸ Lösungsweg A

Betrachte zum Lösen des Gleichungssystems zunächst Gleichung II, da diese Gleichung unabhängig von Parameter a ist.

$$\begin{aligned} \text{II } & f'(x_B) = g_a'(x_B) \\ & \cos x = -\sin x \end{aligned}$$

Gesucht ist hier also eine Stelle x, bei dem die Funktionswerte von $\cos x$ und $-\sin x$ übereinstimmen. Existiert eine Stelle, an welcher diese Bedingung erfüllt ist, so ist diese in der Tabelle für spezielle Sinus - und Cosinus - Werte deiner Formelsammlung bzw. deines Tafelwerks aufgeführt.

Für die Stelle $x_A = \frac{3}{4}\cdot\pi$ gilt Folgendes:

$\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$

$\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$

Da hier $\cos x_A = -\sin x_A$ gilt, ist $x_A = \frac{3}{4}\cdot\pi$ eine zulässige Lösung der Gleichung II.

▸▸ Lösungsweg B

Betrachte zum Lösen des Gleichungssystems auch hier Gleichung II, da diese unabhängig von a ist. Im Folgenden wird II rechnerisch gelöst, wobei folgende Substitution getätigt wird:

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

Lösen der Gleichung II:

$$\begin{aligned} \cos x &= -\sin x && \\ \sqrt{1-\sin^2 x} &= -\sin x && \mid (\,)^2 \\ 1-\sin^2 x &= \sin^2 x && \mid +\sin^2 x \\ 1 &= 2\cdot\sin^2 x && \mid :2 \\ 0,5 &= \sin^2 x && \mid \sqrt{\ } \\ \pm\sqrt{0,5} &= \sin x && \end{aligned}$$

Hier gilt: $\sqrt{0,5} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x$$

Lösungen aus Tabelle für spezielle Sinus- und Cosinus - Werte.

- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi$ und $x_2 = \pi - x_1 = \frac{3}{4}\cdot\pi + 2\cdot k\cdot\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$
- $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2\cdot k\cdot\pi$ und $x_4 = \pi - x_3 = \frac{5}{4}\cdot\pi + 2\cdot k\cdot\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$

Da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, müssen die eben bestimmten Lösungen überprüft werden. Dabei reicht es die jeweiligen Lösungen für ein bestimmtes k zu überprüfen, im Folgenden wird $k=0$ angenommen.

Überprüfe die Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4 durch Einsetzen dieser in II:

$$\cos(x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x_1)$$

$\Longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$ ist keine zulässige Lösung der Gleichung II.

$$\cos(x_2) = \cos\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right) = -\sin(x_1)$$

$\Longrightarrow x_2 = \frac{3\cdot\pi}{4}$ ist eine zulässige Lösung der Gleichung II.

$$\cos(x_3) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x_3)$$

$\Longrightarrow x_3 = -\frac{\pi}{4}$ ist eine zulässige Lösung der Gleichung II.

$$\cos(x_4) = \cos\left(\frac{5\cdot\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\left(-\frac{5\cdot\pi}{4}\right) = -\sin(x_4)$$

$\Longrightarrow x_4 = \frac{5\cdot\pi}{4}$ ist keine zulässige Lösung der Gleichung II.

Einsetzen der zulässigen Lösungen in Gleichung I, um a jetzt so zu bestimmen, dass die Graphen von f und g_a sich berühren:

$$\begin{aligned}
\sin(x_2) &= a_1 + \cos(x_2) \\
\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi + 2\cdot k\cdot\pi\right) &= a_1 + \cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi + 2\cdot k\cdot\pi\right) \\
\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) &= a_1 + \cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) \\
\frac{\sqrt{2}}{2} &= a - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a_1 = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x_3) &= a_2 + \cos(x_3) \\
\sin\left(-\frac{1}{4}\cdot\pi + 2\cdot k\cdot\pi\right) &= a_2 + \cos\left(-\frac{1}{4}\cdot\pi + 2\cdot k\cdot\pi\right) \\
\sin\left(-\frac{1}{4}\cdot\pi\right) &= a_2 + \cos\left(-\frac{1}{4}\cdot\pi\right) \\
-\frac{\sqrt{2}}{2} &= a_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a_2 = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die Graphen von f und g_a berühren sich für $a = \pm\sqrt{2}$.

c) ▶ **Darstellen der Vektoren $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{FG}$ mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$** (2BE)

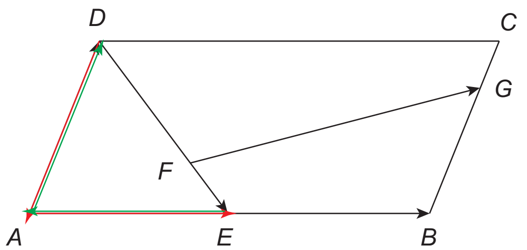
Deine Aufgabe ist es hier, die Vektoren $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{FG}$ mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$ darzustellen. Bevor du damit beginnst, diese Aufgabe zu lösen, solltest du dir die Eigenschaften des Vierecks $ABCD$ kurz vor Augen führen:

- $ABCD$ ist ein Parallelogramm, d.h.: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
- E ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, d.h.: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- F teilt $\overline{DE}$ im Verhältnis 2:1, d.h.: $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{DE}$
- G teilt $\overline{BC}$ im Verhältnis 3:1, d.h.: $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Willst du nun $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{FG}$ mit Hilfe von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ darstellen, so bildest du die entsprechenden Vektorenketten, in welchen du $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ so skalierst und miteinander addierst, dass diese Vektorensummen die jeweiligen Vektoren darstellen.

Darstellen von $\overrightarrow{DE}$ mit $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

Hier kann es hilfreich sein, wenn du die jeweiligen Vektorenkette zwischen den Punkten D und E in die Skizze einträgst:



„Rote“ Vektorenkette:

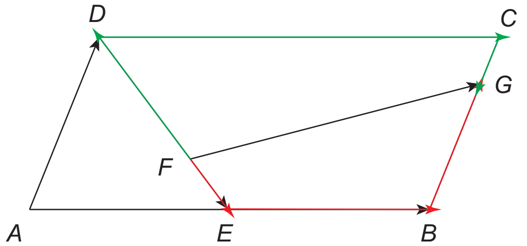
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{b} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

Vektor $\overrightarrow{DE}$ lässt sich also wie folgt mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ darstellen:

- $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

Darstellen von $\overrightarrow{FG}$ mit $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

Auch hier kann es hilfreich sein, wenn du die jeweiligen Vektorenketten zwischen den Punkten F und G in die Skizze einträgst:



„Rote“ Vektorenkette:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}\\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DE}+\tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\tfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{BG}\\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)+\tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{a}+\tfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= \tfrac{1}{6}\cdot\overrightarrow{a}-\tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{b}+\tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{a}+\tfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{b}\\ &= \tfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{a}+\tfrac{5}{12}\cdot\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

„Grüne“ Vektorenkette:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}\\ &= -\tfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}-\tfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= -\tfrac{2}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{a}-\tfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= -\tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{a}+\tfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}-\tfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{b}\\ &= \tfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{a}+\tfrac{5}{12}\cdot\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

Vektor $\overrightarrow{FG}$ lässt sich also wie folgt mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ darstellen:

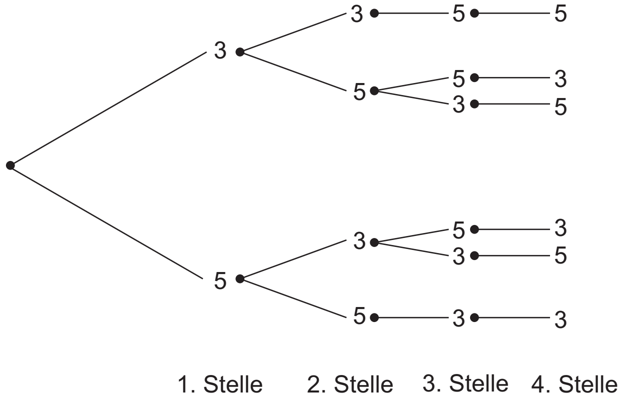
- $\overrightarrow{FG}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{a}+\frac{5}{12}\overrightarrow{b}$.

d) ► **Bestimmen der Wahrscheinlichkeit** (2BE)

Max hat seine Geheimzahl vergessen, das Einzige was er über seine Geheimzahl noch weiß ist, dass diese aus zwei Dreien und zwei Fünfen besteht. Deine Aufgabe ist es hier, herauszufinden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Max spätestens im dritten Versuch die richtige Geheimzahl errät.

Bevor du diese Wahrscheinlichkeit berechnen kannst, bestimmst du zuerst, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Max beim einmaligen Versuch die richtige Geheimzahl ermittelt. Da die Anzahl der auftretenden Dreien und Fünfen in der Geheimzahl beschränkt ist, handelt es sich hier um das Urnenmodell „Ziehen ohne Zurücklegen“.

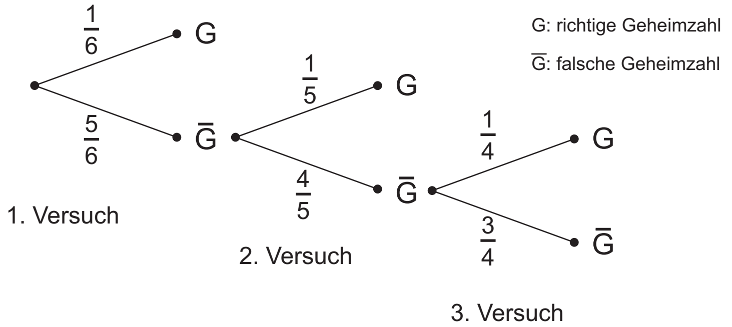
Fertige ein Baumdiagramm zum Sachverhalt an, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen:



Insgesamt gibt es also 6 mögliche Geheimzahlen mit vier Stellen, welche zwei Dreien und zwei Fünfen enthalten. Wenn man nun davon ausgeht, dass Max ohne System, also zufällig die Geheimzahlen errät, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, auf Anhieb die richtige Geheimzahl zu wählen, $\frac{1}{6}$.

Willst du nun die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ dafür berechnen, dass Max spätestens im dritten Versuch seine Geheimzahl errät, musst du auch hier berücksichtigen, dass es sich um „Ziehen ohne Zurücklegen“ handelt. Hat Max eine Geheimzahl angenommen, welche nicht die richtige war, so wird er diese kein zweites Mal wählen.

Der Sachverhalt lässt sich auch hier in einem Baumdiagramm darstellen:



Berechne $P(A)$ mittels Pfadaddition und -multiplikation:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ errät Max erst im dritten Versuch seine Geheimzahl.