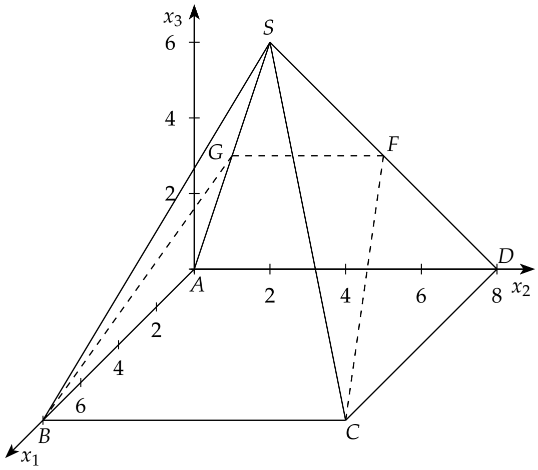
Aufgabe II 1

a) **Darstellung der Pyramide in einem Koordinatensystem** (7VP)

Werden die Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(8 \mid 0 \mid 0)$, $C(8 \mid 8 \mid 0)$, $D(0 \mid 8 \mid 0)$ und $S(4 \mid 4 \mid 8)$ in ein entsprechendes Koordinatensystem eingetragen und mit Linien verbunden, ergibt sich das nebenstehende Schaubild der Pyramide.



Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte F **und** G

F ist der Schnittpunkt der Scharebene E_2: $2x_1 + 3x_3 = 16$ mit der Kante DS. Diese Kante liegt in einer Geraden g_1 durch D und S, für die gilt:

$$g_1\colon \vec{x} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Punkt F entspricht nun genau dem Schnittpunkt dieser Geraden mit E_2. Um diesen zu berechnen, werden die Koordinaten von g_1 in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} g_1 \cap E_2\colon\ 2(0+4s) + 3(0+8s) &= 16 \\ 8s + 24s &= 16 \\ 32s &= 16 \\ s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

F liegt somit für $s = \frac{1}{2}$ auf der Geraden g_1. Für ihn ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(2 \mid 6 \mid 4)$$

Der Punkt G hingegen ist der Schnittpunkt von E_2 mit der Kante AS. Sie liegt in der Geraden g_2 durch A und S:

$$g_2\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Koordinaten in die Ebenengleichung ergibt wiederum:

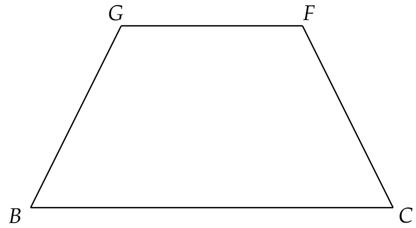
$$\begin{aligned} g_2 \cap E_2\colon\ 2(0+4t) + 3(0+8t) &= 16 \\ 8t + 24t &= 16 \\ 32t &= 16 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für G ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(2 \mid 2 \mid 4)$$

Es ergibt sich insgesamt $F(2 \mid 6 \mid 4)$ und $G(2 \mid 2 \mid 4)$. Das Viereck $BCGF$ ist oben mit gestrichelten Linien eingezeichnet.

Nachweis des gleichschenkligen Trapezes



Das Viereck $BCGF$ ist genau dann ein Trapez, wenn es mindestens zwei parallele Seiten besitzt. Es ist zudem noch gleichschenklig, wenn die beiden nichtparallelen Seiten gleich lang sind.
Anhand der Skizze lässt sich vermuten, dass die Seiten BC und GF die beiden zueinander parallelen Seiten sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die entsprechenden Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{GF}$ Vielfache voneinander sind.

Es gilt $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{GF}$. Die beiden Vektoren sind tatsächlich Vielfache voneinander und die Seiten BC und GF damit parallel.

Somit müssten die Seiten BG und CF nun noch gleich lang sein, damit das Viereck auch ein **gleichschenkliges** Trapez ist:

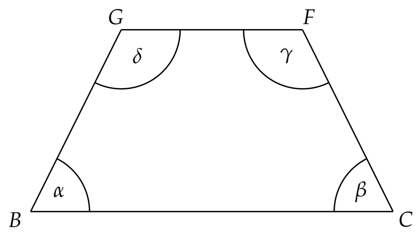
$$\overline{BG} = |\overrightarrow{BG}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{56},$$

$$\overline{CF} = |\overrightarrow{CF}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{56}.$$

Somit sind auch diese beiden Seiten gleich lang. Insgesamt handelt es sich beim Viereck $BCGF$ damit tatsächlich um ein gleichschenkliges Trapez.

Berechnung der Innenwinkel des Trapezes

Wegen der Symmetrie des Trapezes und der Winkelsumme von 360° in einem Viereck muss letztlich nur einer der vier Winkel berechnet werden.



Der Winkel α wird von den Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BG}$ eingeschlossen. Für ihn gilt damit:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{8 \cdot \sqrt{56}}$$

$$= \frac{16}{8 \cdot \sqrt{56}} = \frac{2}{\sqrt{56}} \approx 0{,}2673$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 74{,}5°$$

Beachten Sie, dass die Formel für Winkel zwischen Vektoren **ohne** Betragsstriche im Zähler verwendet werden muss, da es sich hier **nicht** um einen Schnittwinkel, sondern einen ganz „normalen“ eingeschlossenen Winkel handelt.

Wegen der Symmetrie des Trapezes folgt hieraus sofort $\beta = \alpha \approx 74,5°$. Aufgrund der Summe von 360° in einem Viereck gilt weiterhin $\gamma = \delta = 180° - \alpha \approx 105,5°$.

b) **Bestimmung des Wertes** r^* (4VP)

Gesucht ist nun ein Wert r^*, sodass die Spitze $S(4 \mid 4 \mid 8)$ der Pyramide von der entsprechenden Scharebene $E_{r^*}\colon r^* x_1 + 3x_2 = 8r^*$ den Abstand 4 besitzt.

Diese Ebene besitzt die Hesse'sche Normalenform

$$E_{r^*/\text{HNF}}\colon \frac{r^* x_1 + 3x_3 - 8r^*}{\sqrt{r^{*2} + 3^2}} = \frac{r^* x_1 + 3x_3 - 8r^*}{\sqrt{r^{*2} + 9}} = 0.$$

Der Abstand von S zu dieser Ebene ergibt sich durch Einsetzen seiner Koordinaten in die HNF. Er soll 4 betragen:

$$d(S; E_{r^*}) = \frac{|r^* \cdot 4 + 3 \cdot 8 - 8r^*|}{\sqrt{r^{*2} + 9}} = \frac{|24 - 4r^*|}{\sqrt{r^{*2} + 9}} = 4$$

$$|24 - 4r^*| = 4 \cdot \sqrt{r^{*2} + 9}$$

Diese **Betragsgleichung** wird gelöst, indem sie quadriert wird:

$$\begin{aligned} (24 - 4r^*)^2 &= 16 \cdot (r^{*2} + 9) \\ 576 - 192r^* + 16r^{*2} &= 16r^{*2} + 144 \\ 432 &= 192r^* \\ r^* &= \frac{432}{192} = \frac{9}{4} = 2,25 \end{aligned}$$

Somit hat der Punkt S von der Ebene $E_{2,25}\colon 2,25x_1 + 3x_3 = 18$ den Abstand 4.

Berechnung der Koordinaten des Punktes mit geringstem Abstand zu S

Der Punkt P auf der Ebene $E_{2,25}$ mit dem geringsten Abstand zu $S(4 \mid 4 \mid 8)$ entspricht dem Schnittpunkt der **Lotgeraden** zu $E_{2,25}$, die durch den Punkt S verläuft, mit eben der Ebene $E_{2,25}$.

Da die Lotgerade senkrecht zur Ebene $E_{2,25}$ verläuft, entspricht der **Normalenvektor** von $E_{2,25}$ ihrem Richtungsvektor. Eine Parametergleichung von ihr ist somit:

$$\ell\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS} + u \cdot \vec{n}_{2,25} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2,25 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad u \in \mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen ihrer Koordinaten in die Ebenengleichung $E_{2,25}\colon 2,25x_1 + 3x_3 = 18$ ergibt sich der u-Wert für den gesuchten Punkt P:

$$\begin{aligned} \ell \cap E_{2,25}\colon\ 2,25(4 + 2,25u) + 3(8 + 3u) &= 18 \\ 9 + 5,0625u + 24 + 9u &= 18 \\ 14,0625u &= -15 \\ u &= \frac{-15}{14,0625} = -\frac{16}{15} \end{aligned}$$

Somit liegt P für $u = -\frac{16}{15}$ auf der Lotgeraden. Für ihn ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{16}{15}\begin{pmatrix} 2,25 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ 4 \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{8}{5} \mid dle| \, 4 \mid dle| \, \frac{24}{5}\right)$$

Der gesuchte Punkt ist $P\left(\frac{8}{5} \mid dle| \, 4 \mid dle| \, \frac{24}{5}\right)$.

c) **Nachweis, dass die Gerade durch B und C in allen Scharebenen liegt** (5VP)

Hier genügt es einfach zu zeigen, dass die beiden Punkte B und C in allen Ebenen E_r liegen, denn dann muss auch automatisch die Gerade durch beide Punkte in allen E_r liegen.

Um zu überprüfen, ob $B(8 \mid 0 \mid 0)$ in allen Scharebenen liegt, werden seine Koordinaten in die allgemeine Gleichung E_r: $rx_1 + 3x_3 = 8r$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} B \text{ in } E_r\text{:}\ \ r \cdot 8 + 3 \cdot 0 &= 8r \\ 8r &= 8r \end{aligned}$$

Dies ist natürlich für alle Zahlen $r \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit liegt B in allen Scharebenen.

Mit dem Punkt $C(8 \mid 8 \mid 0)$ ergibt sich genauso:

$$\begin{aligned} C \text{ in } E_r\text{:}\ \ r \cdot 8 + 3 \cdot 0 &= 8r \\ 8r &= 8r \end{aligned}$$

Somit liegen beide Punkte in allen Scharebenen und somit auch die Gerade durch diese beiden Punkte.

Bestimmung der möglichen Schnittfiguren mit der Pyramide

Die Ebene E_r dreht sich um die Gerade durch B und C wenn r alle Werte durchläuft.

Enthält die Ebene den Punkt $A(0 \mid 0 \mid 0)$, enthält sie die gesamte (quadratische) Grundfläche der Pyramide und schneidet diese in einem Quadrat. Die Ebene entspricht dann der x_1x_2-Ebene; es muss $r = 0$ sein (denn dann ergibt sich $3x_3 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ als Ebenengleichung, dies entspricht der Gleichung der x_1x_2-Ebene!).

Wenn die Ebene die Pyramidenspitze $S(4 \mid 4 \mid 8)$ enthält, ergibt sich das gleichschenklige BCS als Schnittfigur. Wird S in die Ebenengleichung eingesetzt, ergibt sich $r \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 8r$, also $24 = 4r$ und damit $r = 6$.

Somit schneidet E_r für $r = 6$ die Pyramide in einem gleichschenkligen Dreieck.

Nimmt r Werte zwischen diesen beiden „Randwerten" 0 und 6 an, schneidet die Ebene E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Trapez (wie z.B. die Ebene E_2 in Teilaufgabe a).

Für alle anderen Werte, also entweder $r < 0$ oder $r > 6$ schneidet die Ebene E_r die Pyramide lediglich in der Seitenkante BC, denn diese enthalten sowieso alle Scharebenen.

Zusammengefasst ergibt sich:

- Für $r = 0$ schneidet E_r die Pyramide in einem Quadrat,
- Für $r = 6$ schneidet E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Dreieck,
- Für $0 < r < 6$ schneidet E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Trapez,
- Für $r < 0$ oder $r > 6$ schneidet E_r die Pyramide nur in der Seitenkante BC.