2.1 ▶ Angabe der Ebenengleichung (2P)

Drei Punkte definieren immer eindeutig eine Ebene. Die Ebene in der die Zielscheibe liegt, ist durch die Punkte E, R und Z bestimmbar.

Mit diesen drei Punkten lässt sich eine Parametergleichung der Ebene E der Zielscheibe angeben.

Eine Parametergleichung mit den Parametern r und s einer Ebene hat allgemein die Form:

$$E\colon \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\text{Stützvektor}} + r \cdot \overrightarrow{\text{Spannvektor}_1} + s \cdot \overrightarrow{\text{Spannvektor}_1}$$

Ein Stützvektor ist dabei ein Ortsvektor eines Punktes der Ebene, etwa Z, der zugehörige Stützvektor lautet dann:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Die Spannvektoren sind Vektoren, die nicht zueinander parallel sind und in der Ebene liegen. Solche Vektoren wären die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{ZE}$ und $\overrightarrow{ZR}$. Ihre Koordinaten ergeben sich aus der Differenz ihre Endpunkte:

$$\overrightarrow{ZE} = \begin{pmatrix} -5.005 - (-5.000) \\ 100 - 150 \\ 150 - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ZR} = \begin{pmatrix} -5.000 - (-5.000) \\ 200 - 150 \\ 100 - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Parametergleichung der Ebene E, in der die Zielscheibe liegt, lautet damit:

$$E\colon \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OZ} + r \cdot \overrightarrow{ZE} + s \cdot \overrightarrow{ZR}$$

$$E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.1 ▶ Begründung des Größenunterschieds der Schützen (7P)

Die beiden Geradengleichungen stellen den Ort der Pfeilspitzen zum Zeitpunkt t dar. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Pfeil abgeschossen, er befindet sich zu diesem Zeitpunkt direkt beim Schützen.

Die Schützen stehen wahrscheinlich auf dem Boden, der durch die x_1x_2-Ebene dargestellt wird. Ihre Größe ist also allein abhängig von der x_3-Koordinate. Da die Schützen ihre Pfeile auf Augenhöhe halten, kann man an der x_3-Koordinate der Pfeilspitzen zum Zeitpunkt $t = 0$ ablesen, wer der beiden der größere Schütze ist.

Setze hierzu $t = 0$ in die beiden Geradengleichungen ein und bestimme die Ortsvektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ der Pfeilspitzen zu diesem Zeitpunkt:

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$g:\quad \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -10.004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix}$$

$$h:\quad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -10.006 \\ 340 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Schütze 2 hält zum Zeitpunkt des Abschusses seinen Pfeil 10 cm höher als Schütze 1: Er ist höchstwahrscheinlich der Größere der beiden.

► Begründung, welcher Schütze der Bessere ist

Es ist derjenige Schütze der Bessere, dessen Pfeil näher am Zentrum die Zielscheibe trifft. Wir suchen also den Abstand der Auftreffpunkte der Pfeile zum Punkt Z, um sie anschließend zu vergleichen.

Die Orte der Pfeile werden durch die beiden Geraden g und h definiert. Die Zielscheibe liegt in der zuvor bestimmten Ebene E. Dort, wo sich Gerade und Ebene schneiden, befinden sich folglich die Auftreffpunkte A_1 und A_2 der beiden Schützen.
Wir suchen also

1. die Schnittpunkte S_1 und S_2 von g mit E und h mit E,
2. anschließend die Abstände der beiden Punkte von Z.

Als letztes müssen wir diese Abstände vergleichen und damit den besseren Schützen ermitteln.

1. Schritt: Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene

Die Schnittpunkte von E mit den Geraden ermitteln wir, indem wie die Parametergleichung mit den Geradengleichungen gleichsetzen:

$$\text{Schütze 1:} \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schütze 2:} \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich nun jeweils in drei Zeilen aufspalten. Es ergeben sich zwei lineare Gleichungssysteme mit den Variablen r, s und t. Vereinfache diese so weit wie möglich:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -5.000 - 5r + 0s = 0 - 10.004t \qquad \text{Schütze 1} \\ \text{(II)} & 150 - 50r + 50s = 0 + 360t \\ \text{(III)} & 100 + 50r + 0s = 170 - 100t \\ \hline \text{(I)} & -5r + 0 + 10.004t = 5.000 \\ \text{(II)} & -50r + 50s - 360t = -150 \\ \text{(III)} & 50r + 0 + 100t = 70 \end{array}$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

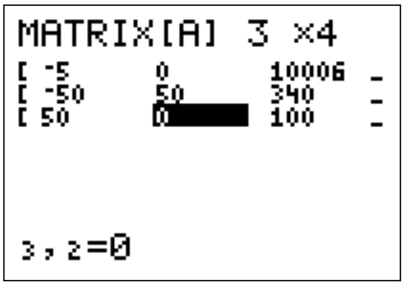
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -5.000 - 5r + 0s &=& 0 - 10.006t \\ \text{(II)} & 150 - 50r + 50s &=& 300 - 340t \\ \text{(III)} & 100 + 50r + 0s &=& 180 - 100t \end{array}$$

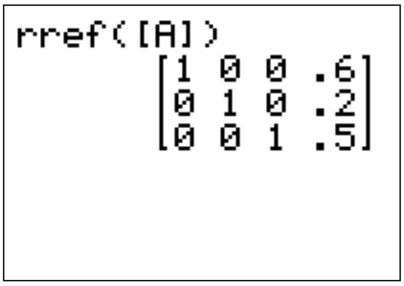
Schütze 2

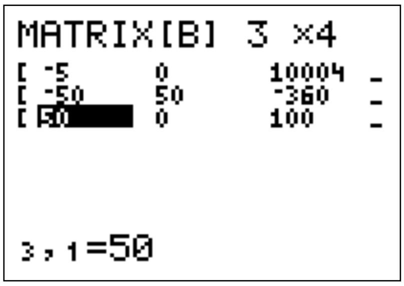
$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -5r + 0 + 10.006t &=& 5.000 \\ \text{(II)} & -50r + 50s + 340t &=& 150 \\ \text{(III)} & 50r + 0 + 100t &=& 80 \end{array}$$

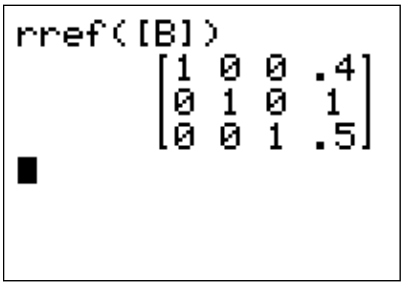
Die zwei LGS kannst du mithilfe des GTR nach r, s und t auflösen.

Gib dazu die Gleichungssysteme als Matrizen über die Befehlsfolge `2ND → MATRX → EDIT` in den Matrix-Editor ein. Verlasse diesen dann und gib den Befehl zum Lösen der Matrix über `2ND → MATRX → MATH → ALPHA → B`. Füge dann die jeweilige Matrix über `2ND → MATRX → NAME` ein und löse über `ENTER`.









Der GTR liefert für beide LGS eindeutige Lösungen. Um die Koordinaten der Schnittpunkte zu berechnen, können wir die Lösungen von t in die Geradengleichungen einsetzen und damit dei Ortsvektoren von S_1 uns S_2 bestimmen.

Für den Schützen 1 liefert der GTR $t = 0,5$. Setze in g ein und bestimme $\overrightarrow{OS_1}$:

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -10004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 5002 \\ 0 + 180 \\ 170 - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5002 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Für den Schützen 2 liefert der GTR ebenfalls $t = 0,5$. Setze in h ein und bestimme $\overrightarrow{OS_2}$:

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 5003 \\ 300 + 170 \\ 180 - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5003 \\ 130 \\ 130 \end{pmatrix}$$

Schütze 1 trifft die Zielscheibe damit im Punkt $S_1(-5002 \mid 180 \mid 120)$ und Schütze 2 im Punkt $S_2(-5003 \mid 130 \mid 130)$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

2. Schritt: Abstände der Auftreffpunkte vom Zentrum Z der Zielscheibe

Der Abstand d zweier Punkte $V(v_1\,|\,v_2\,|\,v_3)$ und $W(w_1\,|\,w_2\,|\,w_3)$ wird allgemein mit der Abstandsformel

$$d = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + (w_3 - v_3)^2}$$

berechnet. Setze jeweils die Koordinaten von S_1 oder S_2 und Z in die Formel ein und berechne die Abstände d_1 und d_2 der Auftreffpunkte der Pfeilspitzen vom Zentrum der Zielscheibe:

$$d_1 = \sqrt{(-5000 - (-5002))^2 + (150 - 180)^2 + (100 - 120)^2} = \sqrt{4 + 900 + 400} \approx 36{,}1109$$

$$d_2 = \sqrt{(-5000 - (-5003))^2 + (150 - 130)^2 + (100 - 130)^2} = \sqrt{9 + 400 + 900} \approx 36{,}1801$$

Der erste Schütze trifft mit einem Abstand von etwa $36{,}1109$ cm zum Zentrum der Zielscheibe etwas besser als der zweite Schütze, der das Zentrum um circa $36{,}1801$ cm verfehlt.

2.2.2 ► **Geringster Abstand der Pfeilspitzen im Flug** (6P)

Die beiden Pfeilspitzen beginnen ihren Flug beide bei $t = 0$ und beenden ihn - wie wir zuvor herausgefunden haben - auf der Zielscheibe bei $t = 0{,}5$.

Innerhalb dieses Zeitraums haben die beiden Pfeilspitzen einen Abstand voneinander, der vom Zeitpunkt t abhängt. Mithilfe der Geradengleichungen kannst du diesen allgemeinen Abstand definieren.

Dazu kannst du zunächst mithilfe dieser Gleichungen zwei allgemeine Punkte

G und H

auf den Geraden in Abhängigkeit von t definieren, die die Pfeilspitzen darstellen. Im Anschluss kannst du dann durch die Abstandsformel zweier Punkte eine Funktion für den Abstand a in Abhängigkeit der Zeit t erstellen.

Das Minimum dieser Funktion tritt dann zu dem Zeitpunkt t ein, zu dem die Pfeilspitzen den geringsten Abstand zueinander aufweisen.

Wir kommen also in drei Schritten zum Ziel:

1. Allgemeine Punkte auf den Geraden h und g definieren.
2. Mithilfe der Abstandsformel eine Abstandsfunktion der beiden Pfeilspitzen aufstellen.
3. Das Minimum der Funktion ermitteln.

1. Schritt: Definition zweier allgemeiner Punkte auf den Geraden

Die Koordinaten allgemeiner Punkte auf Geraden entsprechen den zugehörigen Zeilen in der Geradengleichung. Für einen allgemeinen Punkt G auf der Geraden g mit der Gleichung

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix}$$

gilt folglich: $\boldsymbol{G(-10.004t\,|\,360t\,|\,170 - 100t)}$.

Für einen allgemeinen Punkt H auf der Geraden h mit der Gleichung

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix}$$

gilt analog zu G: $\boldsymbol{H(-10.006t \mid 300 - 340t \mid 180 - 100t)}$.

2. Schritt: Abstandsformel für den Abstand von G zu H

Setze nun die Koordinaten in die Abstandsformel zweier Punkte ein und vereinfache. Es ergibt sich daraus eine Abstandsfunktion a in Abhängigkeit der Zeit t zu

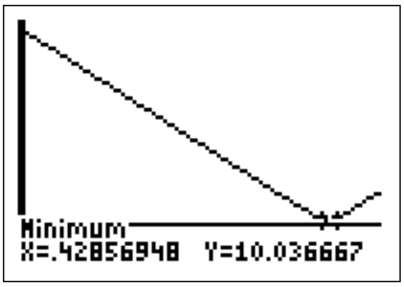
$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{(-10.006t - (-10.004t))^2 + (300 - 340t - 360t)^2 + (180 - 100t - (170 - 100t))^2} \\ &= \sqrt{(-2t)^2 + (300 - 700t)^2 + 10^2} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a(t) = \sqrt{4t^2 + (300 - 700t)^2 + 100}}$$

3. Schritt: Minimum der Abstandsfunktion bestimmen

Das Minimum der Abstandsfunktion lässt sich mit dem GTR bestimmen. Füge dazu die Funktionsvorschrift in den `Y=` -Editor ein und zeichne das Schaubild. Stelle unter `WINDOW` den Bildschirm auf das Intervall ein, innerhalb dessen die Pfeilspitzen sich im Flug befinden, also

$[0; 0,5]$.



Du kannst erkennen, dass in diesem Intervall das relative Minimum auch das absolute darstellt. Dieses kannst du über die Befehlsfolge `2ND → CALC → 3` ermitteln.

Der GTR liefert für t im Minimum $t = 0,4286$, für den Abstand $a(t)$ an dieser Stelle erhalten wir $f(0,4286) \approx 10,0367$.

Etwa $0,4286\,\text{s}$ nach dem Abschuss haben die beiden Pfeilspitzen damit den geringsten Abstand. Dieser beträgt zu diesem Zeitpunkt rund $10,0367\,\text{cm}$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.