a) **► Fehlende Werte in der Tabelle ergänzen** (4P)

Gesucht sind die fehlenden Einträge in der Tabelle, die der Spieler angelegt hat. Dabei hat er auf ZZ gesetzt. Das heißt, er gewinnt, wenn

- er zweimal Zahl wirft (ZZ) und wenn
- er dafür höchstens 5 Versuche benötigt,

und er verliert, wenn

- er zweimal Wappen wirft (WW) oder
- wenn er es nicht schafft, mit höchstens 5 Versuchen ZZ zu werfen.

Ein Versuch entspricht hier dem zweimaligen Wurf der Münze, bei dem die Kombinationen ZZ, WW, ZW und WZ auftreten können. ZW und WZ sind dabei neutral, bei ZZ gewinnt der Spieler, bei WW verliert er automatisch.

Betrachte nun die fehlenden Tabellenwerte:

Der erste gesuchte Wert befindet sich in der ersten Zeile, dritte Spalte. In den letzten beiden Spalten dieser Zeile, also des ersten Spiels, steht „verloren“ und bei der Anzahl der Würfe „2“. Das heißt, der Spieler verliert beim zweiten Wurf. Das ist nur dann der Fall, wenn beim zweiten Wurf WW auftritt. Dann endet das Spiel sofort und er verliert.

Der erste gesuchte Eintrag ist damit WW.

Der zweite gesuchte Wert befindet sich bei Spiel Nr. 4 und Ausgang. Hier kannst du entweder „verloren“ oder „gewonnen“ eintragen. Betrachte hierzu die Würfe dieses Spiels. Der Spieler wirft in den ersten vier Würfen entweder WZ oder ZW, die das Spiel nicht beenden. Beim 5. Wurf erzielt er allerdings ZZ und da er am Anfang auf ZZ gesetzt hat, gewinnt er dieses Spiel.
Der zweite gesuchte Eintrag ist damit G.

Der dritte gesuchte Wert befindet sich bei Spiel Nr. 5 und Anzahl der Würfe. Hier trägst du die Zahl der Würfe ein, die zum Beenden des Spiels benötigt wurden. Du siehst bei den Würfen, dass der Spieler beim vierten Wurf ZZ erzielt und damit gewinnt. Das Spiel endet dann.

Der dritte gesuchte Eintrag ist damit 4.

In den letzten beiden Spalten für dieses Spiel steht „G“ und bei der Anzahl der Würfe „3“. Das heißt, der Spieler hat beim dritten Wurf gewonnen. Wenn der Spieler gewinnt, muss er ZZ werfen:

Der letzte Eintrag ist damit ZZ und die ergänzte Tabelle sieht wie folgt aus:

Spiel Nr.	1. Wurf	2. Wurf	3. Wurf	4. Wurf	5. Wurf	Ausgang	Anzahl der Würfe
1	WZ	WW				V	2
2	ZZ					G	1
3	ZW	WZ	WZ	ZW	WZ	V	5
4	WZ	WZ	ZW	WZ	ZZ	G	5
5	ZW	ZW	WZ	ZZ		G	4
6	ZW	WZ	ZZ			G	3
7	WW					V	1

► Das Vertrauensintervall ($\gamma = 95\,\%$) bestimmen (3P)

Gesucht ist das Intervall, in welchem sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die unbekannte Wahrscheinlichkeit befindet.

Sei X die Anzahl der Spiele. X kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 50$ und p unbekannt.

Bestimme zunächst die Werte für die Größen σ und μ nach den angegebenen Formeln:

$$\mu = n \cdot p = 50p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50p \cdot (1-p)}$$

Aus den σ-Regeln folgt dann wegen $\gamma = 95\,\%$:

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95.$$

Durch Einsetzen erhältst du anschließend:

$$P\left(50p - 1{,}96 \cdot \sigma \leq X \leq 50p + 1{,}96 \cdot \sigma\right) \approx 0{,}95 \qquad |:50$$

$$P\left(p - \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50} \leq \frac{X}{50} \leq p + \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50}\right) \approx 0{,}95$$

$\frac{X}{50}$ entspricht nun der relativen Häufigkeit h der Treffer X in der Stichprobe:

$$P\left(p - \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50} \leq h \leq p + \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50}\right) \approx 0{,}95 \qquad | -p$$

$$P\left(-\frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50} \leq h - p \leq \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50}\right) \approx 0{,}95$$

Der Ausdruck in der Klammer sagt aus, dass der Betrag der Differenz von h zu p kleiner-gleich ist als $\frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50}$:

$$P\left(|p - h| \leq \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50}\right) \approx 0{,}95 \qquad | (...)^2$$

$$P\left((p-h)^2 \leq \frac{1{,}96^2 \cdot \sigma^2}{50^2}\right) \approx 0{,}95$$

Betrachte also die innere Ungleichung

$$(p-h)^2 \leq \frac{1{,}96^2 \cdot \sigma^2}{50^2}$$

Setze nun die Werte für h und σ ein und löse die Ungleichung nach der gesuchten Wahrscheinlichkeit p auf. Das Intervall hat dann die Form

$$\left(p - \frac{1,96 \cdot \sigma}{50}; p + \frac{1,96 \cdot \sigma}{50}\right).$$

Die relative Häufigkeit der Treffer in der Stichprobe entspricht der relativen Häufigkeit der gewonnenen Spiele an der Stichprobe, es gilt also:

$$h(26) = \frac{x}{n} = \frac{26}{50} = 0,52 = 52\,\%$$

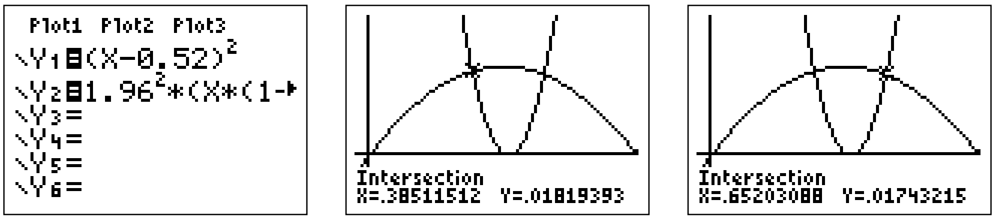
Die relative Häufigkeit beträgt damit $h(52) = 52\,\%$.

Setze nun den Wert für h und n in die Ungleichung ein:

$$(p - h(52))^2 \leq \frac{1,96^2\sigma^2}{50^2}$$
$$(p - 0,52)^2 \leq 1,96^2 \cdot \frac{n \cdot p(1-p)}{50^2}$$
$$(p - 0,52)^2 \leq 1,96^2 \cdot \frac{50 \cdot p(1-p)}{50^2}$$
$$(p - 0,52)^2 \leq 1,96^2 \cdot \frac{p(1-p)}{50}$$

Du kannst diese Ungleichung mithilfe deines GTR graphisch lösen. Gib dazu beide Seiten der Ungleichung in den `Y=`-Editor ein und lass dir die Schaubilder einzeichnen.

In dem Bereich, wo sich das Schaubild der rechten Seite über dem Schaubild der linken Seite bewegt, liegt das gesuchte Vertrauensintervall. Die Grenzen dieses Intervalls befinden folglich bei den Schnittpunkten der beiden Graphen. Diese kannst du mit der Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → Intersect` ermitteln:



Der GTR liefert für die Stichprobe

$x_1 \approx 0,385$ und $x_2 = 0,652$.

Das Vertrauensintervall für die Stichprobe ist damit $[0,385; 0,652]$.

b) ► **Baumdiagramm zum Spiel zeichnen** (4P)

Gesucht ist ein Baumdiagramm zum Spiel, das dabei helfen soll, zu entscheiden, ob die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oder zu verlieren gleich hoch ist.

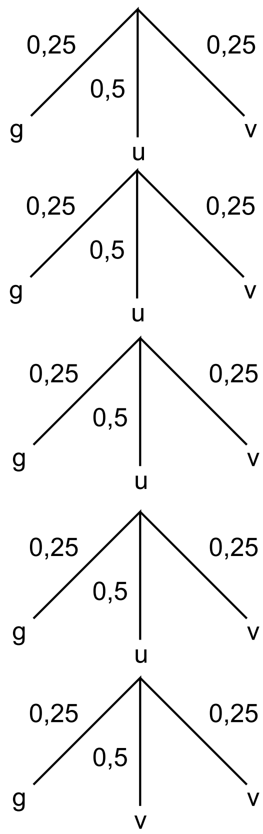
Das heißt, du benötigst einen binären Baum, also einen Baum, dessen Äste sich immer in zwei weitere Äste aufteilen. Beim Wurfspiel gibt es aber noch die Option „unklar", wenn das Spiel bei den Wurfergebnissen WZ und ZW noch nicht entschieden ist.

Der Ansatz für das Baumdiagramm sieht also wie rechts abgebildet aus:

Bei Gewinn oder Verlust verzweigt sich der Baum nicht, ist der Ausgang des Spiels unklar, unterteilt sich der Ast in drei weitere Äste, nämlich „gewonnen" (g), „verloren" (v) oder „unklar" (u), wenn das Spiel noch nicht vorbei ist.

Gewonnen hat der Spieler, wenn ZZ auftaucht. Da es insgesamt vier mögliche Würfe gibt, ist die Wahrscheinlichkeit ZZ zu erwischen:

$p = 0,25$

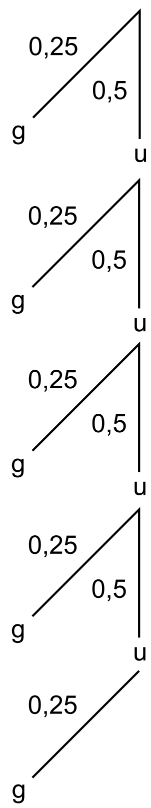


Für einen Verlust bei WW gilt dann ebenso $p = 0,25$ und für „unklar" $p = 0,50$, da es zwei Möglichkeiten gibt ein Unentschieden zu erreichen - durch ZW oder WZ.

Insgesamt weist das Baumdiagramm dann 5 Stufen auf, wobei die letzte Stufe eine Verzweigung nur mit den Möglichkeiten „gewonnen" oder „verloren" besetzt ist, da das Spiel spätestens nach 5 Runden vorbei ist.

Dein Entwurf kann also aussehen wie rechts abgebildet:

Damit du die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade berechnen kannst, die zum Sieg führen, benötigst du jedoch nicht die Äste, die zum Verlust führen. Du kannst sie also aus deinem Diagramm entfernen und nur die Pfade betrachten, die zum Gewinn führen:



► **Wahrscheinlichkeit für einen Sieg berechnen und das Ergebnis interpretieren** (4P)

Am Baumdiagramm kannst du erkennen: Es gibt insgesamt 5 Pfade die mit einem Gewinn enden. Berechne die einzelnen Wahrscheinlichkeiten und addiere sie zur Gesamtwahrscheinlichkeit für einen Sieg nach der Pfadregel zusammen.

Der erste Siegespfad wird dann betreten, wenn der Spieler gleich am Anfang ZZ wirft. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt dann

$p_1 = 0,25.$

Der zweite mögliche Pfad, der zum Gewinn führt, führt über ein Unentschieden. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann nach der Pfadmultiplikation:

$p_2 = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125.$

Die anderen drei Pfade führen über zwei, drei und vier Unentschieden zum Gewinn und ihre Wahrscheinlichkeiten ergeben sich damit analog:

$p_3 = 0,5^2 \cdot 0,25 = 0,0625$

$p_4 = 0,5^3 \cdot 0,25 = 0,03125$

$p_5 = 0,5^4 \cdot 0,25 = 0,015625$

Addiere nun, um die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn zu erhalten, $p_1, ..., p_5$ nach der Pfadaddition zusammen:

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \\ &= 0,25 + 0,125 + 0,0625 + 0,03125 + 0,015625 \\ &= 0,484375 = \frac{31}{64} \approx 48,43\,\% \end{aligned}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für einen Sieg liegt damit bei etwa 48,43 %. Sie ist damit etwas kleiner als die Wahrscheinlichkeit zu verlieren. Das liegt daran, dass die Wahrscheinlichkeit zu verlieren beim fünften Wurf bei 75 % liegt und damit größer ist, als die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, die immernoch 25 % beträgt.

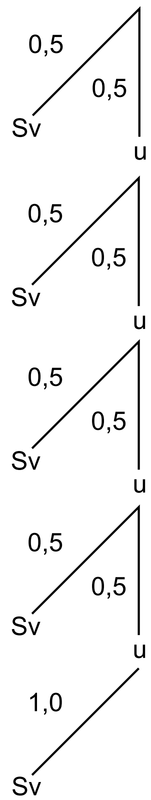
c) ► **Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bestimmen** (4P)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die in diesem Fall der Zahl der Würfe bei einem Spiel entspricht, ist die *Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte*, die die Zufallsgröße X als Tabelle oder Diagramm zeigt.
Im Fall des Wurfspiels kann X Werte von 1 bis 5 annehmen. Bestimme also die Wahrscheinlichkeiten für alle diese möglichen Anzahlen von Würfen und stelle sie als Tabelle dar.

Nutze dazu ein Baumdiagramm, das zwischen „Spiel vorbei"(Sv) und „unentschieden"(u) unterscheidet. Jeder Pfad, der mit Sv endet, ist dann ein Pfad mit einer bestimmten Anzahl von Würfen. Du kannst dann die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Pfade nach der Pfadregel berechnen und anschließend in die Tabelle eintragen.

Wenn der Spieler WW oder ZZ wirft, ist das Spiel sofort vorbei. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel beendet wird, liegt damit bei 50 %. Entsprechend geht ein Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % unentschieden aus. Nur beim fünften Wurf wissen wir, dass das Spiel dann endet. Dort beträgt die Wahrscheinlichkeit für Sv 100 %.

Das zugehörige Baumdiagramm kann etwa wie rechts abgebildet aussehen.



Es gibt fünf Pfade, die jeweils verschiedene Längen haben. Eine Stufe entspricht dabei einem Wurf. Bestimme mithilfe der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Pfade und trage sie in eine Tabelle ein.

Für einen Pfad der Länge 1 beträgt die Wahrscheinlichkeit:

$p_1 = 0{,}5$

Für Länge 2, 3 und 4 folgt

$p_1 = 0{,}5^2$,

$p_3 = 0{,}5^3$ und

$p_4 = 0{,}5^4$.

Bei fünf Würfen ist der letzte Wurf mit 100 % Sicherheit entscheidend, damit ergibt sich für p_5:

$p_5 = 0{,}5^4 \cdot 1 = 0{,}5^4$

Trage deine Ergebnisse schließlich in eine Tabelle ein:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$0{,}5$	$0{,}5^2$	$0{,}5^3$	$0{,}5^4$	$0{,}5^4$

► **Erwartungswert berechnen und im Sachzusammenhang interpretieren** (3P)

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X für die Anzahl der Würfe ist derjenige Wert, der angibt, wie viele Würfe durchschnittlich pro Spiel gemacht werden. Um diesen Wert zu ermitteln, benötigst du die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die du zuvor berechnet hast:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$0{,}5$	$0{,}5^2$	$0{,}5^3$	$0{,}5^4$	$0{,}5^4$

Der Erwartungswert $E(X)$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Wahrscheinlichkeiten für die Anzahlen X der Würfe mit den Zahlen X selbst:

$E(X) = x_1 \cdot p_1 + ... + x_n \cdot p_n$

In diesem Fall ist $n = 5$ und du kannst die Ergebnisse aus der Tabelle in die Formel eintragen und den Erwartungswert berechnen:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5 \\ &= 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5^2 + 3 \cdot 0{,}5^3 + 4 \cdot 0{,}5^4 + 5 \cdot 0{,}5^4 \\ &= 1{,}9375 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X ist damit $E(X) = 1{,}9375$. Das bedeutet im Sachzusammenhang, dass beim Wurfspiel im langfristigen Mittel etwa zwei Würfe pro Spiel gemacht werden.