a) ▶ **Geradengleichungen u_1 und u_2 angeben** (8P)

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt:

- U-Boot U_1 passiert die Punkte $P_0\,(4 \mid 14 \mid -4)$ und $P_1\,(6 \mid 11 \mid -4)$.
- U-Boot U_2 passiert die Punkte $Q_0\,(11 \mid 9 \mid -14)$ und $Q_1\,(9 \mid 6 \mid -12)$.

Eine Gerade g hat allgemein die Gleichung

$g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{q},$

wobei $\vec{p}$ der Stützvektor und $\vec{q}$ der Richtungsvektor ist. Wähle z.B. für die beiden Geraden $\overrightarrow{OP_0}$ bzw. $\overrightarrow{OQ_0}$ als **Stützvektoren** und die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ bzw. $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ als **Richtungsvektoren**.

1. Schritt: Geradengleichung für u_1

Der Stützvektor $\overrightarrow{OP_0}$ hat die Koordinaten $\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Für den Richtungsvektor $\overline{P_0P_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 11-14 \\ -4-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt die Gleichung der Geraden u_1 mit

$$u_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

2. Schritt: Geradengleichung für u_2

Der Stützvektor $\overrightarrow{OQ_0}$ hat die Koordinaten $\overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Für den Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-11 \\ 6-9 \\ -12-(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es folgt die Gleichung der Geraden u_2 mit

$$u_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

▶ **Geschwindigkeiten der U-Boote nachweisen**

Überlege, was „Geschwindigkeit“ bedeutet: Sie gibt dir an, welche **Strecke** in welcher **Zeit** zurückgelegt wird. Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- U-Boot U_1 legt die Strecke von P_0 zu P_1 in 1 Minute zurück.
- U-Boot U_2 legt die Strecke von Q_0 zu Q_1 in 1 Minute zurück.

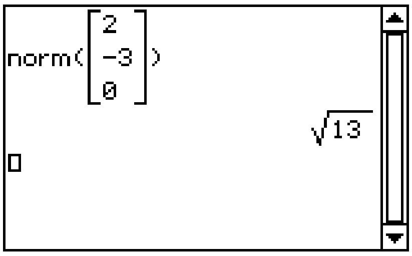
Du kannst also so vorgehen:

- Berechne zunächst die Länge der Strecken $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{Q_0Q_1}$.
- Eine Einheit im Koordinatensystem entsprechen 100 m. Multipliziere die Ergebnisse also mit 100, um die Länge in Meter zu erhalten.
- Diese Strecken legen die beiden U-Boote jeweils in 1 Minute zurück. Formuliere die Geschwindigkeit in Meter pro Minute.

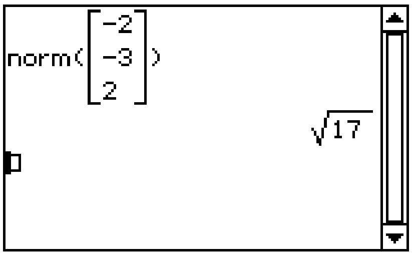
1. Schritt: Streckenlängen berechnen

Die Länge einer Strecke entspricht dem Betrag des zugehörigen Vektors. Die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ hast du bereits berechnet.

$$\begin{aligned}\overline{P_0P_1} = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| &= \left|\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{2^2+(-3)^2+0^2} = \sqrt{4+9}\\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overline{Q_0Q_1} = \left|\overrightarrow{Q_0Q_1}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{4+9+4}\\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$



2. Schritt: Geschwindigkeit berechnen

1 LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Wirklichkeit. Die U-Boote haben tatsächlich jeweils die 100-fache Strecke zurückgelegt und haben dafür je eine Minute gebraucht

U-Boot U_1 legt in einer Minute eine Strecke von $100 \cdot \sqrt{13}\,\text{m} \approx 361\,\text{m}$ zurück.
U-Boot U_2 legt in einer Minute eine Strecke von $100 \cdot \sqrt{17}\,\text{m} \approx 412\,\text{m}$ zurück.

Damit kannst du sagen:
U-Boot U_1 fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \cdot \sqrt{13}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 361\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.
U-Boot U_1 fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \cdot \sqrt{17}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \approx 412\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

▶ Begründen, dass u_1 und u_2 nicht parallel sind

Zwei Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel verlaufen. Dies wiederum ist der Fall, wenn die Richtungsvektoren **Vielfache** voneinander sind.

Formal kannst du das so formulieren: Geraden u_1 und u_2 sind parallel, wenn für die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ gilt:
$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}$.

Prüfe nach, ob diese Gleichung erfüllt ist.

$$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ -3k \\ 2k \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow k = -1 \\ \Rightarrow k = 1 \\ \Rightarrow k = 0 \end{matrix}$$

Es ergibt sich kein einheitlicher Wert für k. Deshalb sind die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander und die Geraden u_1 und u_2 sind nicht parallel.

▶ Kleinsten Abstand der U-Boote untersuchen

Hier ist wichtig, dass du die Aufgabenstellung genau liest: Es ist nicht nach dem kleinsten Abstand der **Geraden** u_1 und u_2 gefragt, sondern nach dem kleinsten Abstand der **U-Boote**.

Zu Beginn, um 12:21 Uhr, befindet sich U_1 in Punkt P_0 und U_2 in Punkt Q_0. Du weißt, dass sie sich geradlinig entlang des Richtungsvektors bewegen und die Strecke, die durch den Richtungsvektor beschrieben wird, in einer Minute zurücklegen.

Das heißt: Wenn du $r = 1$ in die Geradengleichungen einsetzt, so erhältst du die Position der U-Boote nach einer Minute; für $r = 2$ die Position nach zwei Minuten; für $r = 3$ die Position nach drei Minuten etc.

Die Geradengleichungen geben dir also an, in welcher Position sich U_1 bzw. U_2 nach r Minuten befinden.

Du kannst so vorgehen:

- Fasse die Geradengleichung jeweils in einem **Vektor** $\overrightarrow{OB_1}$ bzw. $\overrightarrow{OB_2}$. zusammen. Er beschreibt die Position, an der sich das jeweilige U-Boot nach r Minuten befindet.
- Gesucht ist der **kleinste Abstand** der beiden U-Boote. Berechne also den Abstand $\overline{B_1B_2}$. Er gibt dir an, wie weit die beiden U-Boote nach r Minuten voneinander entfernt sind.
- Untersuche, welchen kleinsten Wert dieser Abstand annehmen kann.

1. Schritt: Position der U-Boote als Vektor formulieren

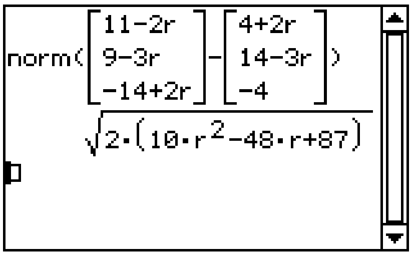
U-Boot U_1 befindet sich nach r Minuten im Punkt B_1 mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OB_1} = \begin{pmatrix} 4+2r \\ 14-3r \\ -4 \end{pmatrix}$.

U-Boot U_2 befindet sich nach r Minuten im Punkt B_2 mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OB_2} = \begin{pmatrix} 11-2r \\ 9-3r \\ -14+2r \end{pmatrix}$.

2. Schritt: Abstand der U-Boote berechnen

Die U-Boote befinden sich nach r Minuten in den Punkten B_1 und B_2. Der Abstand der beiden U-Boote ist dann der Abstand der beiden Punkte und somit auch die Länge der Strecke $\overline{B_1B_2}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{B_1B_2} = \left|\overrightarrow{B_1B_2}\right| &= \left|\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 11-2r \\ 9-3r \\ -14+2r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+2r \\ 14-3r \\ -4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 11-2r-(4+2r) \\ 9-3r-(14-3r) \\ -14+2r-(-4) \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 11-2r-4-2r \\ 9-3r-14+3r \\ -14+2r+4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 7-4r \\ -5 \\ -10+2r \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{(7-4r)^2+(-5)^2+(-10+2r)^2} \\
&= \sqrt{49-2\cdot 7\cdot 4r+(4r)^2+25+100-2\cdot 10\cdot 2r+(2r)^2} \\
&= \sqrt{49-56r+16r^2+25+100-40r+4r^2} \\
&= \sqrt{174-96r+20r^2}
\end{aligned}
$$



Für den Abstand der beiden U-Boote nach r Minuten ergibt sich der Term $\sqrt{20r^2-96r+174}$.

3. Schritt: Minimalen Abstand berechnen

Wir wollen den Abstand d der beiden U-Boote als Funktion d mit $d(r) = \sqrt{20r^2-96r+174}$ auffassen. Gesucht ist der minimale Abstand, also der kleinste Funktionwert von d.

Eine Wurzelfunktion wird minimal, wenn ihr **Radikand**, also der Ausdruck unter der Wurzel, minimal wird. Du erkennst, dass es sich beim Ausdruck unter der Wurzel um eine **ganzrationale Funktion zweiten Grades** handelt, deren Graph eine **nach oben geöffnete Parabel** ist. Diese Parabel besitzt genau einen Extrempunkt und dies ist ein Tiefpunkt. Also besitzt auch die Funktion d nur genau eine Extremstelle und dies muss eine Minimalstelle sein.

Weil du dies weißt, kannst du auf das hinreichende Kriterium beim Nachweis des Minimums verzichten.

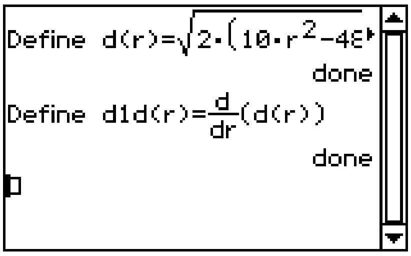
Berechne das **Minimum** r_M von d.

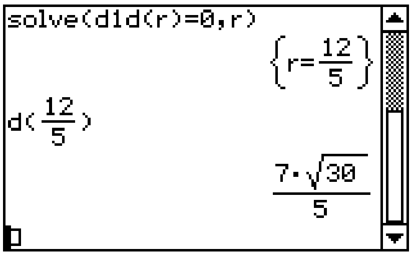
Für dieses Minimum gilt

- das **notwendige Kriterium** $d'(r_M) = 0$,
- das **hinreichende Kriterium** $d''(r_M) > 0$. Auf dieses Kriterium kannst du aufgrund der oben gegebenen Erläuterung verzichten.

Definiere zunächst die Funktion d sowie die erste Ableitung d'. Wir speichern sie unter d1d(r). Den Befehl für „Ableiten" findest du dabei unter `2D → CALC`. Löse dann die Gleichung $d'(r) = 0$ mit dem `solve`-Befehl und erhalte so die potentiellen Extremstellen von d.

Zuletzt kannst du mit $d(r_M)$ den zugehörigen minimalen Abstand berechnen.





Das CAS liefert die potentielle Extremstelle $r_M = \frac{12}{5} = 2{,}4$. Bei dieser Extremstelle handelt es sich um ein Minimum, weil der Radikand im Funktionsterm von d genau ein Minimum besitzt. Für den Abstand selbst ergibt sich: $d(\frac{12}{5}) = \frac{7\cdot\sqrt{30}}{5} \approx 7{,}67$.

Eine LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität. Also können sich die beiden U-Boote **höchstens** auf 767 m nahe kommen. Damit folgt:

Die beiden U-Boote können sich auf ihren Kursen maximal 767 m nahe kommen. Sie kommen sich also nicht näher als 500 m.

b) ► **Entfernung von U_2 und Kreuzfahrtschiff untersuchen** (11P)

Laut Aufgabenstellung liegt die Meeresoberfläche in der x-y-Ebene. Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht, ist also der Punkt, in dem die Gerade u_2 die x-y-Ebene durchstößt.

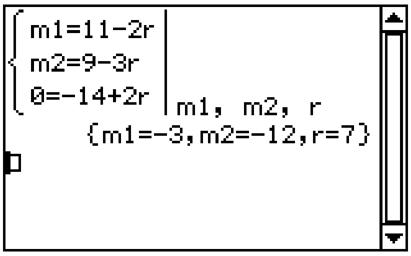
Alle Punkte in der x-y-Ebene haben die z-Koordinate $z = 0$. Berechne also den Punkt auf der Geraden u_2, für den gilt: $z = 0$.

Du kannst so vorgehen:

- Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 an die Meeresoberfläche kommt, sei der Punkt M. Er hat allgemein die Koordinaten $M\,(m_1 \mid m_2 \mid 0)$. Setze diese Koordinaten in die Geradengleichung von u_2 ein und löse nach r auf.
- Bestimme dann die vollständigen Koordinaten von M.
- Berechne zuletzt den Abstand der Punkte M und K.

1. Schritt: Punkt M berechnen

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Betrachte diese Gleichung zeilenweise und du erhältst ein lineares Gleichungssystem mit drei Zeilen. Dieses Gleichungssystem kannst du mit deinem CAS lösen. Die zugehörige Vorlage findest du im CAS unter $\boxed{\texttt{2D}}$.

Mit dem CAS ergibt sich $r = 7$, $m_1 = -3$ und $m_2 = -12$.

Damit folgt:

Das U-Boot U_2 erreicht die Meeresoberfläche im Punkt $M\,(-3 \mid -12 \mid 0)$.

2. Schritt: Abstand von M und K berechnen

Gesucht ist der Abstand des U-Bootes U_2 an der Meeresoberfläche und dem Kreuzfahrtschiff, das in Punkt $K\,(45 \mid 2 \mid 0)$ ankert. Berechne also die Länge der Strecke $\overline{MK}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{MK} = \left|\overrightarrow{MK}\right| &= \left|\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 45 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 45-(-3) \\ 2-(-12) \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 48 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{48^2 + 14^2} \\
&= \sqrt{2.500} = 50
\end{aligned}
$$

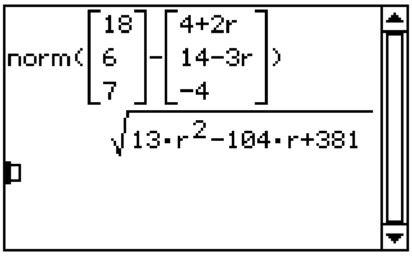
Eine LE im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Wirklichkeit. Also sind das U-Boot U_2 und das Kreuzfahrtschiff insgesamt $50\,\text{m} \cdot 100 = 5.000\,\text{m} = 5\,\text{km}$ voneinander entfernt, wenn das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht.

c) ▶ **Abstand von allgemeinem Punkt X und F angeben** (7P)

Der Punkt X soll ein allgemeiner Punkt auf der Geraden u_1 sein. Seine Koordinaten folgen aus der Geradengleichung der Gerade u_1:

$X\,(4+2r \mid 14-3r \mid -4)$.

Gesucht ist der Abstand der Punkte X und F. Berechne also die Länge der Strecke $\overline{XF}$.

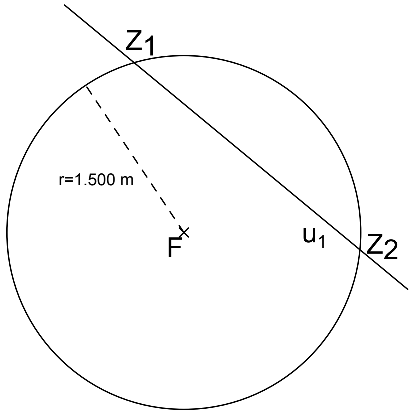


$$
\begin{aligned}
\overline{XF} = \left|\overrightarrow{XF}\right| &= \left|\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OX}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+2r \\ 14-3r \\ -4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 18-(4+2r) \\ 6-(14-3r) \\ 7-(-4) \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 18-4-2r \\ 6-14+3r \\ 7+4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 14-2r \\ -8+3r \\ 11 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{(14-2r)^2 + (-8+3r)^2 + (11)^2} \\
&= \sqrt{14^2 - 2\cdot 14\cdot 2r + (2r)^2 + (-8)^2 - 2\cdot 8\cdot 3r + (3r)^2 + 121} \\
&= \sqrt{196 - 56r + 4r^2 + 64 - 48r + 9r^2 + 121} \\
&= \sqrt{381 - 104r + 13r^2} \\
&= \sqrt{13r^2 - 104r + 381}
\end{aligned}
$$

Der Abstand eines allgemeinen Punktes X auf der Geraden u_1 vom Punkt F beträgt $\sqrt{13r^2 - 104r + 381}$.

► Punkte bestimmen, wo Übertragung noch möglich ist

Eine Skizze der Situation kann dir bei der Lösung dieser Aufgabe helfen:



Der Bereich, in dem sich das U-Boot U_1 befinden muss, um noch eine Nachricht an die Station senden zu können, kann als **Kreis** mit einem Radius von 1.500 m dargestellt werden. Die beiden Punkte, an denen eine Übertragung gerade noch möglich ist, sind die beiden Schnittpunkte von Kreis und Gerade. Wir haben sie in nebenstehender Abbildung mit Z_1 und Z_2 bezeichnet.

Diese beiden Punkte liegen auf der Geraden u_1 und haben vom Punkt F einen Abstand von 1.500 m. Da eine LE im Koordinatensystem 100 m in der Wirklichkeit entspricht, sind diese beiden Punkte vom Punkt F 15 LE entfernt.

Den Abstand, den ein beliebiger Punkt X auf der Geraden u_1 vom Punkt F hat, hast du soeben bestimmt. Dieser Abstand soll nun 15 LE betragen. Du kannst so vorgehen:

- Setze den Term für den allgemeinen Abstand gleich 15.
- Löse diese Gleichung mit dem `solve`-Befehl nach r. Du erhältst zwei Lösungen r_1 und r_2.
- Setze r_1 und r_2 anschließend in die Geradengleichung von u_1 ein, um die Koordinaten der beiden Punkte Z_1 und Z_2 zu erhalten.

1. Schritt: Parameterwerte für r ermitteln

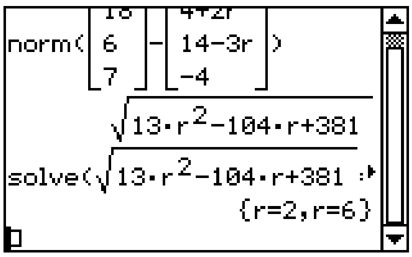
Löse die Gleichung

$\sqrt{13r^2 - 104r + 381} = 15$

mit dem `solve`-Befehl.

Das CAS liefert die beiden Lösungen

$r_1 = 2$ und $r_2 = 6$.



2. Schritt: Koordinaten der Punkte bestimmen

Setze $r_1 = 6$ und $r_2 = 2$ in die Geradengleichung von u_1 ein und erhalte so die Koordinaten der beiden Punkte Z_1 und Z_2.

$$\overrightarrow{OZ_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+12 \\ 14-18 \\ -4+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OZ_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4+4 \\ 14-6 \\ -4+0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die beiden Punkte, in denen eine Übermittlung gerade noch möglich ist, sind $Z_1\,(16 \mid -4 \mid -4)$ und $Z_2\,(8 \mid 8 \mid -4)$.

▶ Zeitfenster angeben, in dem Übertragung möglich ist

Du weißt, dass das U-Boot U_1 die durch den Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ beschriebene Strecke in einer Minute zurücklegt und dass es sich um 12:21 Uhr im Punkt P_0 befindet. Für $r = 2$ erhältst du also die Position nach zwei Minuten um 12:23 Uhr, für $r = 3$ nach drei Minuten um 12:24 Uhr etc.

Du hast eben berechnet, dass eine Übertragung zu den Zeitpunkten $r = 2$ und $r = 6$ **gerade noch** möglich ist. Also ist im Bereich $2 \leq r \leq 6$ eine Übertragung möglich. Im Sachzusammenhang interpretiert heißt das:

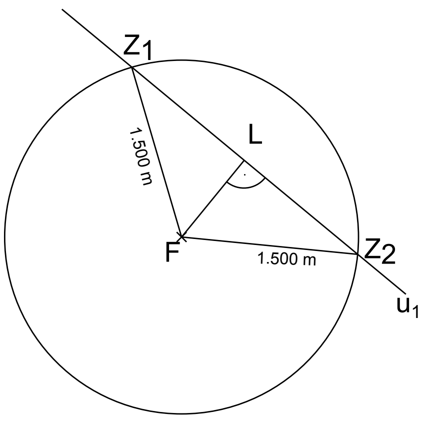
Zwischen 12:23 Uhr und 12:27 Uhr ist eine Übertragung möglich.

▶ Punkt mit kleinstem Abstand zur Forschungsstation angeben

Der Kurs u_1 des U-Boots U_1 wird durch die Gerade u_1 beschrieben. Gesucht ist der Punkt auf dieser Geraden, der vom Punkt F, in dem sich die Forschungsstation befindet, den kleinsten Abstand hat.

Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Es muss also das **Lot** vom Punkt F auf die Gerade u_1 gefällt werden. Dieses Lot schneidet die Gerade u_1 im **Lotfußpunkt** L. Dieser Punkt L ist dann der Punkt auf der Geraden u_1, der den kleinsten Abstand vom Punkt F hat.

Oben, bei der Berechnung von Z_1 und Z_2, hast du dir die gegenseitige Lage von u_1 und F bereits angesehen. Betrachte diese Lage, unter Berücksichtigung der Punkte Z_1 und Z_2 erneut:



Der Punkt F ist von den Punkten Z_1 und Z_2 mit je 1.500 m gleichweit entfernt. Also bilden die Punkte F, Z_1 und Z_2 ein **gleichschenkliges Dreieck**. Das **Lot** vom Punkt F auf die Gerade u_1 stimmt überein mit der **Höhe** in diesem Dreieck.

Im gleichschenkligen Dreieck **halbiert** die Höhe die Grundseite des Dreiecks. Also ist der Lotfußpunkt L genau der **Mittelpunkt** der Strecke $\overline{Z_1Z_2}$.

Berechne also L als Mittelpunkt dieser Strecke:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}16\\-4\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\8\\-4\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}16+8\\-4+8\\-4+(-4)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}24\\4\\-8\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}12\\2\\-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

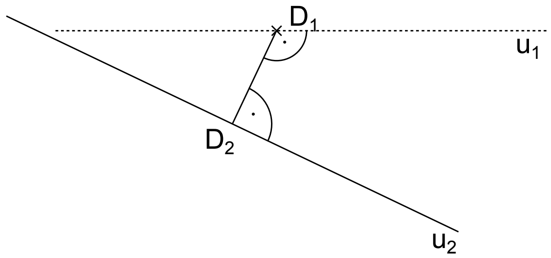
Im Punkt $L\,(12\mid 2\mid -4)$ hat das U-Boot auf dem Kurs u_1 den kleinsten Abstand von der Forschungsstation.

d) ▶ **Koordinaten von D_2 berechnen** (4P)

Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- Es gibt einen Punkt auf der Geraden u_1, nämlich D_1, in dem der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.
- Gesucht ist nun der Punkt D_2 auf der Geraden u_2, in dem ebenfalls der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.

Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Der Abstand kann also dargestellt werden, indem man das **Lot** von D_1 auf die Gerade u_2 fällt. Da der Abstand von u_1 und u_2 im Punkt D_1 minimal wird, steht dieses Lot auch senkrecht auf u_1. Dabei gibt es einen **Lotfußpunkt** auf der Geraden u_2. Der minimale Abstand der Geraden ist also zugleich der Abstand von D_1 zum Lotfußpunkt. Also ist der Lotfußpunkt auch der Punkt auf u_2, welcher den kleinsten Abstand zum Kurs u_1 hat und damit unser gesuchter Punkt D_2.



Eine möglicher Lösungsweg (Lösungsweg A) ist also dieser:

1. Bestimme die Gleichung einer Hilfsebene H, welche den Punkt D_1 enthält und senkrecht zur Geraden u_1 verläuft. Verwende dazu eine Ebenengleichung in Koordinatenform mit Stützvektor $\overrightarrow{OD_1}$. Der Normalenvektor der Hilfsebene H ist der Richtungsvektor der Geraden u_1.

2. Berechne den Schnittpunkt S der Hilfsebene H mit der Geraden u_2. Der Verbindungsvektor von S und D_1 liegt in der Ebene H. Deshalb steht dieser Verbindungsvektor senkrecht auf der Geraden u_1. Da der Abstand von u_1 zu u_2 im Punkt D_1 minimal wird, steht dieser Verbindungsvektor auch senkrecht auf der Geraden u_2. Also ist der Schnittpunkt S unser gesuchter Punkt D_2.

Alternativ kannst du auch diesen Lösungsweg (Lösungsweg B) wählen:

1. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{D_1D_2}$ soll senkrecht auf den beiden Geraden u_1 und u_2 stehen. Mit dem **Vektorprodukt** der Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{Q_0Q_1}$ erhältst du solch einen Vektor. Wir nennen ihn $\vec{n}$.

2. Bestimme eine Hilfsgerade h, welche durch den Punkt D_1 verläuft und den Vektor $\vec{n}$ als Richtungsvektor hat. h steht senkrecht auf u_1 und u_2 und verläuft durch D_1.

3. Berechne den Schnittpunkt S der Hilfsgeraden h mit der Geraden u_2. Mit der gleichen Begründung wie oben ist dieser Schnittpunkt dann unser gesuchter Punkt D_2.

►► Lösungsweg A: Lösung über Hilfsebene

1. Schritt: Hilfsebene H bestimmen

Eine Ebenengleichung in Koordinatenform lautet allgemein:

$H : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d,$

wobei a, b und c die Koordinaten des Normalenvektors der Ebene sind und d eine Konstante, die du über eine Punktprobe bestimmen kannst. Die Ebene soll durch den Punkt D_1 verlaufen und senkrecht auf die Gerade u_1 stehen. Wähle also den Richtungsvektor von u_1 als Normalenvektor $\vec{n}$. Setze anschließend die Koordinaten von D_1 in die Gleichung ein und löse nach d auf.

$H : 2x - 3y + 0z = d.$

Einsetzen von $D\,(10 \mid 5 \mid -4)$ liefert:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10 - 3 \cdot 5 &= d \\ 20 - 15 &= d \\ 5 &= d \end{aligned}$$

Damit folgt die Ebenengleichung $H : 2x - 3y = 5.$

2. Schritt: Schnittpunkt S von H und u_2 berechnen

Betrachte die Geradengleichung von u_2:

$$u_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Du kannst diese Gleichung zeilenweise betrachten und erhältst so **drei** Gleichungen $x = \dots$, $y = \dots$ und $z = \dots$. Setze diese einzelnen Gleichungen in die Ebenengleichung von H ein und löse nach r auf. Setze zuletzt r wieder in die Geradengleichung von u_2 ein und erhalte so die Koordinaten des gesuchten Punktes:

$$\begin{aligned} x &= 11 - 2r \\ y &= 9 - 3r \\ z &= -14 + 2r \end{aligned}$$

Zeilenweises Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (11 - 2r) - 3 \cdot (9 - 3r) &= 5 \\ 22 - 4r - 27 + 9r &= 5 \\ -5 + 5r &= 5 \qquad \mid +5 \\ 5r &= 10 \qquad \mid :5 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Setze $r = 2$ ein in die Geradengleichung von u_2 und erhalte die Koordinaten von D_2:

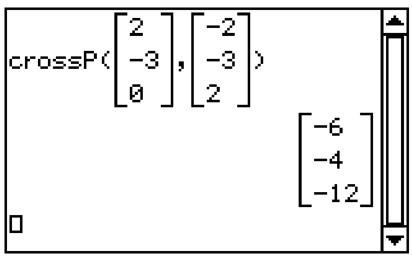
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD_2} &= \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 - 4 \\ 9 - 6 \\ -14 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im Punkt $D_2\,(7 \mid 3 \mid -10)$ hat das U-Boot auf dem Kurs u_2 den geringsten Abstand zu u_1.

►► Lösungsweg B: Lösungsweg über Hilfsgerade

1. Schritt: Vektor $\vec{n}$ berechnen

Vektor $\vec{n}$ soll senkrecht sowohl auf den Richtungsvektor von u_1 als auch auf den von u_2 stehen. Einen solchen Vektor kannst du mit dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren berechnen.
Im CAS lautet der Befehl für „Vektorprodukt“ `CrossP`.



Das CAS liefert den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$. Da beim Normalenvektor nicht die **Länge**, sondern nur die **Richtung** interessiert, kannst du diesen Vektor vereinfachen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Hilfsgerade *h* bestimmen

h steht senkrecht auf u_1 und u_2 und verläuft durch den Punkt D_1. Wähle also den Vektor $\vec{n}$ als **Richtungsvektor** der Geraden h und den Ortsvektor $\overrightarrow{OD_1}$ als **Stützvektor** der Geraden:

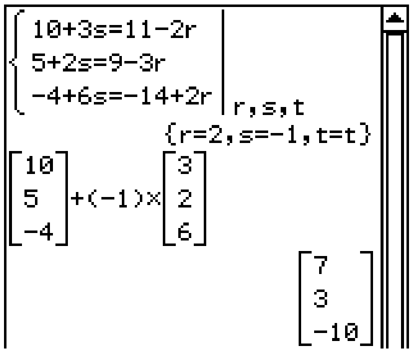
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3. Schritt: Schnittpunkt *S* von *h* und u_2 berechnen

Der gesuchte Punkt D_2 ist der Schnittpunkt der Hilfsgeraden h mit der Gerade u_2. Du kannst den Schnittpunkt durch **Gleichsetzen** berechnen:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \overset{h \cap u_2}{=} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Betrachte diese Gleichung zeilenweise, dann erhältst du ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen. Dieses Gleichungssystem kannst du in deinem CAS lösen. Die zugehörige Vorlage findest du dabei unter $\boxed{\text{2D}}$.



Das CAS liefert $r = 2$ und $s = -1$. Einsetzen einer dieser Parameter in die jeweilige Geradengleichung ergibt den Punkt $D_2\,(7 \mid 3 \mid -10)$.

Im Punkt $D_2\,(7 \mid 3 \mid -10)$ hat das U-Boot auf dem Kurs u_2 den geringsten Abstand zu u_1.