a) ▶ **Definitionsbereich von f_a angeben** (7P)

Der Definitionsbereich von f_a umfasst alle Werte, welche für x eingesetzt werden dürfen. Betrachte den Funktionsterm von f_a. Er stellt sich als Produkt eines linearen Terms $\frac{3}{4}x$ und eines logarithmischen Terms $\ln\left(\frac{x}{a^2}\right)$ dar. Der ln ist dabei nur für **positive Argumente** definiert.

▶ **Nullstelle von f_a bestimmen**

Setze $f_a(x) = 0$, um die Nullstelle von f_a zu bestimmen.

▶ **Verhalten der Funktionswerte für $x \to 0$ bestimmen**

In diesem Aufgabenteil wird die Funktion f_a für $a = 3$ betrachtet. Bestimme zunächst den zugehörigen Funktionsterm $f_3(x)$:

$$f_3(x) = \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{9}\right)$$

Gefragt ist nach dem Verhalten der Funktionswerte $f_3(x)$ für $x \to 0$. In Formeln:

$$\lim_{x\to 0} f_3(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{9}\right)$$

Überlege dir: gegen welchen Wert streben die beiden Faktoren des Funktionsterms und welcher der beiden Werte setzt sich langfristig durch?

b) ▶ **Lokalen Tiefpunkt T_a nachweisen** (13P)

$T_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}} \mid -\frac{3a^2}{4\mathrm{e}}\right)$ ist ein lokaler Tiefpunkt von G_a, wenn

1. T_a auf G_a liegt, d.h. wenn gilt: $f_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{3a^2}{4\mathrm{e}}$,
2. das notwendige Kriterium für ein Minimum erfüllt ist, d.h. wenn gilt: $f_a'\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) = 0$,
3. das hinreichende Kriterium für ein Minimum erfüllt ist, d.h. wenn gilt: $f_a''\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) > 0$.

Prüfe diese drei Bedingungen nach. Du kannst dabei so vorgehen:

- Bilde im ersten Schritt die erste Ableitung f_a' nach der Produkt- und der Kettenregel. Die zweite Ableitung ist dir in der Aufgabenstellung gegeben.
- Untersuche anschließend durch Einsetzen und Ausrechnen, ob die drei Kriterien erfüllt sind.

▶ **Nachweis, dass kein Wendepunkt existiert**

Für eine Wendestelle x_W von f_a müsste gelten:

- $f_a''(x_W) = 0$
- $f_a'''(x_W) \neq 0$

Wenn keiner der Graphen G_a einen Wendepunkt besitzen soll, so darf die zweite Ableitung f_a'' keine Nullstellen besitzen. Prüfe dies nach.

▶ **Parameter a der Scharkurven bestimmen**

Du hast im Aufgabenteil a) die Nullstelle von f_a berechnet, nämlich $x = a^2$. Die Nullstelle von f_a ist die Stelle, an der der Graph G_a die x-Achse schneidet. Bei allen drei Scharkurven ist diese Stelle gut aus der Anlage abzulesen.

Lies die Nullstellen ab und bestimme hieraus den zugehörigen Parameterwert von a. Beachte dabei, dass gilt: $a > 0$.

c) ▶ **Stammfunktion von f_a ermitteln** (9P)

Der Funktionsterm von f_a ist ein Produkt aus einem linearen und einem logarithmischen Term. Du kannst eine Stammfunktion von f_a durch **partielle Integration** bestimmen. Die Formel hierzu lautet allgemein:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x) \cdot v(x)] - \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$$

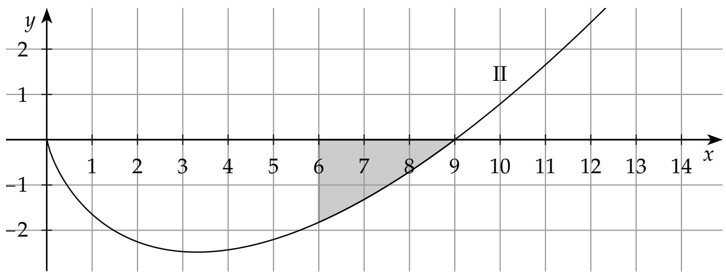
Es bietet sich an, als $u'(x)$ denjenigen Faktor zu wählen, der **leicht zu integrieren** ist.

Wir wählen daher: $u'(x) = \frac{3}{4}x \qquad v'(x) = \frac{1}{\frac{x}{a^2}} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^2}{x} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{x}$

$u(x) = \frac{3}{8}x^2 \qquad v(x) = \ln\left(\frac{x}{a^2}\right)$

▶ **Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen**

Wir wollen den Inhalt der eingeschlossenen Fläche mit A bezeichnen. Die Fläche wird vom Graphen von f_3 und der x-Achse für $6 \leq x \leq 9$ eingeschlossen. Der Graph zu f_3 ist der Graph G_3. In der Anlage ist er als Graph II eingezeichnet. Du kannst die betrachtete Fläche darin markieren:



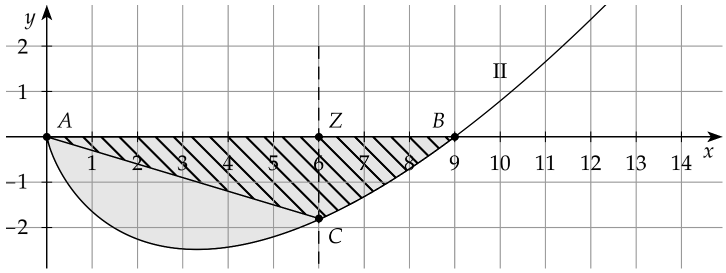
Du erkennst, dass die Fläche vollständig unterhalb der x-Achse liegt. Ihren Flächeninhalt A kannst du nun über den **Hauptsatz der Integralrechnung** ermitteln. Als Stammfunktion kannst du hierbei das eben berechnete unbestimmte Integral von f_a verwenden. Da die Fläche vollständig unterhalb der x-Achse liegt, liefert das zugehörige Integral einen **negativen Flächeninhalt**. Du kannst Betragsstriche verwenden, um einen positiven Wert zu erhalten.

Da die Funktion f_3 betrachtet wird, kannst du $a = 3$ einsetzen.

d) ▶ **Fläche des Naturschutzgebietes berechnen** (6P)

Betrachte die beschriebene Situation zunächst in einer Abbildung. Beim **Fahrweg** handelt es sich um den Graphen G_3, der in der Anlage als G II dargestellt ist. Die Orte Altfeld und Burghausen sind durch die Punkte $A\,(0 \mid 0)$ und $B\,(9 \mid 0)$ dargestellt; die gerade **Landstraße** zwischen den beiden Orten liegt also auf der x-Achse. Das **Naherholungsgebiet** entspricht dann der Fläche, welche von der x-Achse und dem Graphen G_3 zwischen $x = 0$ und $x = 9$ eingeschlossen wird.

Das Ausflugslokal liegt in Punkt $C\,(6 \mid -1{,}8)$. Laut Aufgabenstellung liegt es „direkt am Fahrweg", d.h. höchstwahrscheinlich liegt der Punkt C auf dem Graphen G_3. Die Strecke $\overline{AC}$ teilt nun das Nacherholungsgebiet in zwei Teilflächen, wobei der Inhalt der **größeren** Fläche berechnet werden soll. Wir haben sie in der folgenden Abbildung schraffiert:



Betrachte die schraffierte Fläche. Sie lässt sich in zwei Teilflächen gliedern:

- ein **rechtwinkliges Dreieck** ACZ mit den Katheten $\overline{AZ}$ und $\overline{ZC}$,
- das Flächenstück, dessen Inhalt $\int\limits_6^9 f_3(x)\,\mathrm{d}x \approx 3$ du bereits in Aufgabenteil c) berechnet hast.

Berechne den Inhalt des Dreiecks und ermittle so den Flächeninhalt des gesamten Naturschutzgebietes.

▶ Prozentualen Anteil der Fläche berechnen

Zuletzt ist nach dem prozentualen Anteil gefragt, den das Naturschutzgebiet am gesamten Naherholungsgebiet besitzt. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass das Naherholungsgebiet insgesamt 15,2 km^2 groß ist.

e) **▶ Koordinaten von P_a bestimmen** (5P)

Die Gerade, welche den Radweg durch die Punkte $A(0 \mid 0)$ und $C(6 \mid -1,8)$ enthält, wollen wir mit g bezeichnen. Die Gerade g schneidet laut Aufgabenstellung jeden Graphen G_a in einem Punkt P_a. Gesucht sind die Koordinaten von P_a.

Den Schnittpunkt zweier Graphen kannst du durch Gleichsetzen der zugehörigen Funktionsterme berechnen. Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst eine Gleichung der Geraden g.
- Setze dann $f_a(x) = g(x)$ und löse nach x auf. So erhältst du die x-Koordinate von P_a.
- Berechne zuletzt die zugehörige y-Koordinate von P_a.