a) **Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang beschreiben** (10P)

Abbildung 1 stellt die Temperatur eines Körpers dar, der sich bei konstanter Raumtemperatur abkühlt. Auf der t-Achse wird dabei die Zeit in Sekunden und auf der $T(t)$-Achse die Temperatur in °C abgetragen.

Der Körper besitzt eine Anfangstemperatur von 100°C. Wie man erwarten würde, fällt die Temperatur ständig, die Kurve ist monoton fallend. Nach etwa 70 Sekunden ist die Temperatur von 100°C auf 60°C gesunken und nach 100 Sekunden weiter auf etwa 50°C.

Es fällt auf, dass sich der Körper mit zunehmender Zeit **langsamer** abkühlt; so fällt seine Temperatur von 100°C auf 80°C beispielsweise innerhalb von knapp 30 Sekunden, während der Kühlungsprozess von 80°C auf 60°C schon etwa 40 Sekunden in Anspruch nimmt.

► Temperatur berechnen

Aus der Aufgabenstellung ist dir die Funktion bekannt, welche die Temperatur des Körpers beschreibt:

$T(t) = 20 + 80\mathrm{e}^{-0{,}01t}$

Setze nun $t = 120$ sein und bestimme somit die Temperatur, die der Körper zu diesem Zeitpunkt noch besitzt.

$T(120) = 20 + 80\mathrm{e}^{-0{,}01\cdot 120} \approx 20 + 80 \cdot 0,3 = 44$

Die Temperatur des Körpers ist nach 120 Sekunden auf etwa 44°C gesunken.

► Langfristige Entwicklung ermitteln

Hier ist nach dem Grenzwert von $T(t)$ für große Werte für t gefragt, d.h. für $t \to \infty$:

$\lim\limits_{t\to\infty} \left(20 + 80\mathrm{e}^{-0{,}01t}\right) = 20$

Betrachte den Funktionsterm. Die konstante Zahl 20 bleibt gleich, egal wie sie t verändert. Nicht so der Teil mit der e-Funktion. Schreibe diesen Ausdruck zunächst um, um besser damit hantieren zu können:

$80\mathrm{e}^{-0{,}01t} = 80 \cdot \dfrac{1}{\mathrm{e}^{0{,}01t}}$. $\mathrm{e}^{0{,}01t}$ wird für große Werte von t unendlich groß; dementsprechend wird der Bruch $\frac{1}{\mathrm{e}^{0{,}01t}}$ für große Werte von t gegen Null laufen.

Für große Werte von t nähert sich die Funktion $T(t)$ dem Wert 20 an. Im Sachzusammenhang interpretiert bedeutet dies, dass sich die Temperatur des Körpers $K1$ auf lange Sicht gesehen 20°C annähert, was genau der **Raumtemperatur** entspricht.

b) **Formel zur mittleren Temperatur nachweisen** (10P)

Du weißt, dass die mittlere Temperatur berechnet wird durch $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} T(t)\,\mathrm{d}t$.

Versuche, diesen Ausdruck durch **Integration**, d.h. durch **Bildung einer Stammfunktion** umzuschreiben.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_2-t_1}\cdot\int_{t_1}^{t_2} T(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\int_{t_1}^{t_2}\left(20+80\mathrm{e}^{-0{,}01t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\left[20t+80\cdot\frac{1}{-0{,}01}\mathrm{e}^{-0{,}01t}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\left[20t-8000\mathrm{e}^{-0{,}01t}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\left(\left(20t_2-8000\mathrm{e}^{-0{,}01t_2}\right)-\left(20t_1-8000\mathrm{e}^{-0{,}01t_1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\left(20t_2-8000\mathrm{e}^{-0{,}01t_2}-20t_1+8000\mathrm{e}^{-0{,}01t_1}\right) && \mid 20 \text{ ausklammern} \\
&= \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\left(20\left(t_2-t_1\right)-8000\mathrm{e}^{-0{,}01t_2}+8000\mathrm{e}^{-0{,}01t_1}\right) && \mid -8000 \text{ ausklammern} \\
&= \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\left(20\left(t_2-t_1\right)-8000\left(\mathrm{e}^{-0{,}01t_2}-\mathrm{e}^{-0{,}01t_1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Dies ist genau die Form, die in der Aufgabenstellung vorgegeben ist. Damit ist gezeigt, dass die mittlere Temperatur über diese Formel berechnet werden kann.

▶ Mittlere Temperatur berechnen

▶▶ Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Es soll die mittlere Temperatur innerhalb der ersten 120 Sekunden berechnet werden, d.h. im Intervall $[0;120]$. Setze also $t_1 = 0$ und $t_2 = 120$ ein in die Formel, die du eben bewiesen hast. Wir wollen die mittlere Temperatur mit $\overline{T}$ bezeichnen.

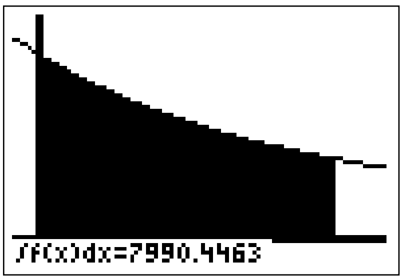
$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{120-0}\cdot\left(20\cdot(120-0)-8000\cdot\left(\mathrm{e}^{-0{,}01\cdot 120}-\mathrm{e}^{-0{,}01\cdot 0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{120}\cdot\left(2400-8000\cdot\left(\mathrm{e}^{-1{,}2}-1\right)\right) \\
&\approx \frac{1}{120}\cdot 7990{,}45 \approx 66{,}59
\end{aligned}$$

Die mittlere Temperatur in den ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs lag bei etwa $66{,}59\,^\circ\mathrm{C}$.

▶▶ Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Die mittlere Temperatur kann auch berechnet werden über $\overline{T} = \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\int_{t_1}^{t_2} T(t)\,\mathrm{d}t$. Es wird also zunächst die **Maßzahl der Fläche** bestimmt, welche der Graph von T mit der x-Achse im Intervall $[t_1;t_2]$ einschließt, und anschließend wird diese Maßzahl durch t_2-t_1 geteilt. In unserem Fall ist $t_1 = 0$ und $t_2 = 120$.

Zeichne T und berechne mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \int f(x)dx}$ das Integral im gewünschten Bereich.



Setze $\int_0^{120} T(t)\,\mathrm{d}t = 7990{,}446$ ein in die Formel zur mittleren Temperatur:

$\overline{T} = \dfrac{1}{120-0} \cdot 7990,446 = 60,59$

Die mittlere Temperatur in den ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs lag bei etwa 66,59°C.

c) **Eigenschaften des Graphen von T begründen** (18P)

Abbildung 2 stellt die **Ableitung** von T dar, eben die Abkühlungsgeschwindigkeit, die Änderungsrate. Versuche nun, den Verlauf des Graphen von T anhand der Abbildung T' zu beschreiben.

Zum einen fällt auf, dass das Schaubild der Ableitung T' **unterhalb** der t-Achse verläuft, d.h. die Steigung von T ist **negativ**. Dies äußert sich im Schaubild von T dadurch, dass T monoton fällt.

Weiterhin fällt auf, dass die Abkühlungsgeschwindigkeit mit zunehmender Zeit **positiver** wird, sie nähert sich von unten der t-Achse an. Auch dies lässt sich im Schaubild von T erkennen, nämlich daran, dass das Schaubild mit zunehmender Zeit **langsamer** fällt.

Schließlich besitzt T' keine Schnittpunkte mit der t-Achse und auch keine Extrempunkte. Dementsprechend besitzt auch T weder Extrem- noch Wendepunkte.

▶ Maximalen Betrag angeben und begründen

Im Schaubild ist leicht zu erkennen, dass der maximale Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit bei $t = 0$ liegt einen Wert von $0,8$ annimmt. Es handelt sich hier bei um ein **Randextremum**.

Begründe nun rechnerisch, dass es tatsächlich keine „echten“ Extremstellen im Intervall $[0;120]$ gibt. Bilde also die Ableitung T'' und setze diese Null. Somit berechnest du die Extremstellen von T'.

$$T''(t) = -0,8 \cdot (-0,01)\mathrm{e}^{-0,01t} = 0,008\mathrm{e}^{-0,01t}.$$

Setze nun $T''(t) = 0$:

$$\begin{aligned} 0,008\mathrm{e}^{-0,01t} &= 0 \qquad |: 0,008 \\ \mathrm{e}^{-0,01t} &= 0 \end{aligned}$$

Die e-Funktion nimmt niemals den Wert Null an; somit ist gezeigt, dass die Abkühlungsgeschwindigkeit T' **keine Extremstellen** besitzt. Damit kommt nur das Randextremum bei $t = 0$ in Frage.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist zu Beginn der Beobachtung $t = 0$ mit eine Abkühlung um 0,8 °C pro Sekunde am größten.

▶ Flächeninhalt berechnen

▶▶ Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Sei A der Inhalt der Fläche. Sie wird eingeschlossen vom Schaubild von T' und der t-Achse, als Integrationsgrenzen dienen die Werte $t = 0$ und $t = 120$.

Da T' die **Ableitung** von T ist, ist umgekehrt natürlich T eine **Stammfunktion** von T'. Da T' unterhalb der t-Achse verläuft, werden Betragsstriche gesetzt, um einen positiven Flächeninhalt zu erhalten.

$$A = \left|\int_0^{120} T'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|[T(t)]_0^{120}\right| = |T(120) - T(0)| \qquad | \; T(120) \approx 44 \text{ (s. Aufgabenteil a)}$$
$$\approx \left|44 - \left(20 + 80\mathrm{e}^0\right)\right| = |44 - (20+80)| = |44 - 100| = 56$$

Der Inhalt des Flächenstücks beträgt etwa 56 FE.

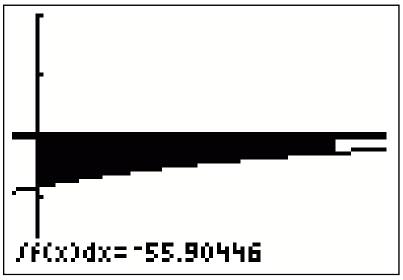
Dieser Wert muss nun im Sachzusammenhang interpretiert werden. T' gibt dir die Abkühlungsgeschwindigkeit an, d.h. du kannst zu jedem Zeitpunkt ablesen, um wie viel °C die Temperatur gerade fällt.

Das **Integral** der Abkühlungsgeschwindigkeit gibt dir also an, um **wie viel °C** die Temperatur **insgesamt gefallen ist**.

Die Temperatur des Körpers ist im Intervall $[0;120]$ um insgesamt etwa 56°C gefallen.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne T' und berechne mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \int f(x)dx}$ das Integral im gewünschten Bereich.



Der Inhalt des Flächenstücks beträgt etwa 56 FE.

► Mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit berechnen

Im Aufgabenteil b) wurde dir die Formel gegeben, mit der du die mittlere Temperatur berechnen kannst, nämlich $\frac{1}{t_2-t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t)\,\mathrm{d}t$.

Die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit erhältst du entsprechend über das Integral: $\frac{1}{t_2-t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,\mathrm{d}t$.

Wie vorhin schon sind $t_1 = 0$ und $t_2 = 120$. Eben hast du berechnet, dass $\left|\int_0^{120} T'(t)\,\mathrm{d}t\right| \approx 56$ ist. Setze diesen Wert ein in die Formel zum Mittelwert:

$$\overline{T'} = \frac{1}{120} \cdot \left|\int_0^{120} T'(t)\,\mathrm{d}t\right| \approx \frac{1}{120} \cdot 56 \approx 0{,}4\overline{6}$$

Die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit liegt bei $0{,}4\overline{6}\ \frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$.

d) **Mittlere Änderungsrate ermitteln** (12P)

Versuche zunächst, das Wirrwar von Begriffen zu entschlüsseln. Die Abkühlungsgeschwindigkeit wird dir gegeben durch T'. Sie ist die Ableitung und damit die Änderungsrate der Temperatur T.

Die Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit ist demnach die **Ableitung der Abkühlungsgeschwindigkeit**, also T''. Bestimme erst den Term dieser Ableitung:

$$T''(t) = -0{,}8 \cdot (-0{,}01)\mathrm{e}^{-0{,}01t} = 0{,}008\mathrm{e}^{0{,}01t}.$$

Nun ist wieder nach dem Mittelwert gefragt. Hierzu benötigst du wieder die Formel von oben. Als Grenzen dienen wieder $t = 0$ und $t = 120$; was die Stammfunktion angeht, so weißt du ja, dass T'' die Ableitung von T' ist, demnach ist also umgekehrt T' eine Stammfunktion von T''.

$$\begin{aligned}\overline{T''} &= \frac{1}{120} \cdot \int_0^{120} T''(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{120}\left[T'(t)\right]_0^{120} = \frac{1}{120}\left(T'(120) - T'(0)\right)\\ &= \frac{1}{120} \cdot \left(-0,8\mathrm{e}^{-0,01\cdot 120} - \left(-0,8\mathrm{e}^{-0,01\cdot 0}\right)\right)\\ &= \frac{1}{120} \cdot \left(-0,241 + 0,8\mathrm{e}^{0}\right) = \frac{1}{120} \cdot (-0,241 + 0,8) \approx 0,00466\end{aligned}$$

Die mittlere Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit liegt bei etwa $0,00466\ \frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}^2}$.

▶ Zeitpunkt ermitteln

▶▶ Lösungsweg A: Handschriftliche Lösung

Die momentane Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit ist wie gesagt die **Ableitung der Abkühlungsgeschwindigkeit**, also einfach T''. Es ist nun nach einer Stelle t gefragt, an der T'' genau den Mittelwert $0,00466$ annimmt.

Setze also $T''(t) = 0,00466$ und löse nach t auf.

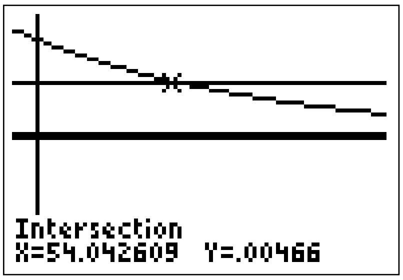
$$\begin{aligned} T''(t) = 0,008\mathrm{e}^{-0,01t} &= 0,00466 && |: 0,008\\ \mathrm{e}^{-0,01t} &= 0,5825 && |\ \ln(\,)\\ \ln\left(\mathrm{e}^{-0,01t}\right) &= \ln(0,5825)\\ -0,01t &= \ln(0,5825) && |: (-0,01)\\ t &= \frac{\ln(0,5825)}{-0,01} \approx 54,04\end{aligned}$$

Etwa zum Zeitpunkt $t = 54$, also 54 Sekunden nach Beginn des Abkühlungsvorgangs, nimmt die momentane Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit ihren eigenen Mittelwert an.

▶▶ Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Interpretiere die Gleichung $T''(t) = 0,00466$ als den Versuch, zwei Kurven miteinander zu schneiden. Dabei ist die eine Kurve T'', die andere ist eine Parallele zur t-Achse, nämlich $y = 0,00466$.

Zeichne T'' und $y = 0,00466$ und berechne mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{INTERSECT}}$ deren Schnittpunkt.



Etwa zum Zeitpunkt $t = 54$, also 54 Sekunden nach Beginn des Abkühlungsvorgangs, nimmt die momentane Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit ihren eigenen Mittelwert an.