a) **Bestimmung des Funktionsterms der Funktion f** (12VP)

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat die allgemeine Funktionsgleichung $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ mit $a \neq 0$. Wie sich zeigen wird, werden hier auch die ersten beiden Ableitungen dieser Funktion benötigt, für die gilt:

$f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

$f''(t) = 6at + 2b$

Aus den gegebenen Bedingungen ergibt sich:

- Der Graph von f verläuft durch den Ursprung, da er hier die Steigung 144 haben soll. Es muss also $f(0) = 0$ sein:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ 1 \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

  Damit vereinfacht sich die Funktionsgleichung auf $f(t) = at^3 + bt^2 + ct$.

- Um Ursprung selbst hat die Funktion die Steigung 144, somit ist $f'(0) = 144$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 144 \\ 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c &= 144 \\ c &= 144 \end{aligned}$$

  Damit vereinfacht sich die Funktionsgleichung auf $f(t) = at^3 + bt^2 + 144t$.

- Der Graph verläuft durch den Wendepunkt $P(8\,|\,128)$, daher muss $f(8) = 128$ sein:

$$\begin{aligned} f(8) &= 128 \\ a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + 144 \cdot 8 &= 128 \\ 512a + 64b + 1.152 &= 128 \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

- Da der Graph den Wendepunkt $P(8\,|\,128)$ besitzt, muss $f''(8) = 0$ sein:

$$\begin{aligned} f''(8) &= 0 \\ 6a \cdot 8 + 2b &= 0 \\ 48a + 2b &= 0 \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

Mit den beiden Gleichungen (I) und (II) lassen sich noch die beiden Koeffizienten a und b bestimmen. Dazu wird die Gleichung (II) nach b aufgelöst, was auf $b = -24a$ führt. Einsetzen in (I) ergibt:

$$\begin{aligned} 512a + 64 \cdot (-24a) + 1.152 &= 128 \\ 512a - 1.536a + 1.152 &= 128 \\ -1.024a &= -1.024 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort $b = -24a = -24$.

Die Funktion f hat damit die Funktionsgleichung $f(t) = t^3 - 24t^2 + 144t$.

b) **Berechnung der Koordinaten der Achsenschnittpunkte** (14VP)

Auf der y-Achse haben alle Punkte die t-Koordinate $t = 0$. Es muss noch berechnet werden, was für einen Funktionswert $f(t)$ hier hat:

$f(0) = 0^3 - 24 \cdot 0^2 + 144 \cdot 0 = 0$

Der Graph von f schneidet die y-Achse somit im Punkt $S_y(0\,|\,0)$, also im Ursprung.

Für die Schnittpunkte mit der t-Achse müssen alle Stelle gesucht werden, an denen $f(t) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \\ t^3 - 24t^2 + 144t &= 0 \\ t \cdot (t^2 - 24t + 144) &= 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0 \\ t^2 - 24t + 144 &= 0 \\ t_{2/3} &= 12 \pm \sqrt{12^2 - 144} = 12 \pm 0 \\ t_{2/3} &= 12 \end{aligned}$$

An den Stellen $t_1 = 0$ und $t_2 = 12$ hat die Funktion den Funktionswert 0. Die Schnittpunkte sind also $S_{t_1}(0\,|\,0)$ sowie $S_{t_2}(12\,|\,0)$.

Hinweis: Da an der Stelle $t = 12$ eine **doppelte** Nullstelle vorliegt, schneidet der Graph hier die t-Achse eigentlich nicht, sondern berührt sie nur.

Berechnung der Koordinaten der relativen Extrempunkte

An den Extremstellen von f gilt die notwendige Bedingnung $f'(t) = 0$. Für die erste Ableitung von f gilt dabei:

$f'(t) = 3t^2 - 48t + 144$

Mit der notwendigen Bedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ 3t^2 - 48t + 144 &= 0 \\ t^2 - 16t + 48 &= 0 \\ t_{1/2} &= 8 \pm \sqrt{8^2 - 48} = 8 \pm 4 \\ t_1 &= 4 \\ t_2 &= 12 \end{aligned}$$

Die Stellen $t_1 = 4$ und $t_2 = 12$ sind somit die einzigen möglichen Extremstellen. Um sie nachzuweisen und gleichzeitig ihre Art zu bestimmen, werden ihre Werte in die zweite Ableitung $f''(t) = 6t + 48$ eingesetzt:

$f''(4) = 6 \cdot 4 - 48 = 24 - 48 = -24 < 0$

$f''(12) = 6 \cdot 12 - 48 = 72 - 48 = 24 > 0$

f hat somit ein relatives Maximum an der Stelle $t = 4$ und ein relatives Minimum an der Stelle $t = 12$. Für die Funktionswerte an diesen Stellen ergibt sich:

$f(4) = 4^3 - 24 \cdot 4^2 + 144 \cdot 4 = 256 \quad \Rightarrow \quad$ Hochpunkt $H(4\,|\,256)$

$f(12) = 12^3 - 24 \cdot 12^2 + 144 \cdot 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Tiefpunkt $T(12\,|\,0)$

Die relativen Extrempunkte des Graphen von f sind der Hochpunkt $H(4\,|\,256)$ und der Tiefpunkt $T(12\,|\,0)$.

c) **Begründung dass der Zeitraum größer als 7 Stunden ist** (4VP)

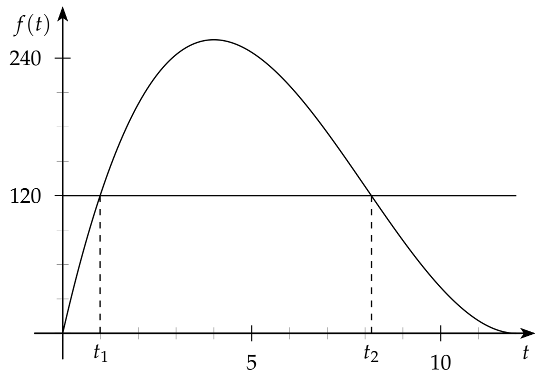
Es ist hier nun der Bereich von f gesucht, in dem die Funktionswerte größer als 120 sind.

Anhand des Graphen ist zu erkennen, dass die Zuflussgeschwindigkeit nach einer Stunde erstmals bei ca. 120 liegt. Der Funktionswert $f(1) = 121$ bestätigt dies eindeutig.

Weiterhin ist zu erkennen, dass die Zuflussgeschwindigkeit erst wieder nach ca. $8,1$ Stunden auf diesem Niveau ist und danach absinkt. Diese Vermutung wird durch den Funktionswert $f(8,1) \approx 123,2$ bestätigt.

Es ergibt sich damit ein Zeitraum von etwa $7,1$ Stunden, also mehr als 7 Stunden, in dem die Zuflussgeschwindigkeit mehr als 120 $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ beträgt.

Die exakten Werte, bei denen die Funktionswerte von f genau 120 betragen, lassen sich mit dem GTR z.B. durch einen Schnitt von f mit der Geraden $y = 120$ bestimmen. Der GTR liefert hier die Schnittstellen $t_1 \approx 0,99$



sowie $t_2 \approx 8,17$. Der betrachtete Zeitraum umfasst somit $t_2 - t_1 \approx 7,18$ Stunden.

d) **Berechnung des Flächeninhalts und Interpretation** (9VP)

Der gesuchte Flächeninhalt kann als Integral über $f(t)$ von $t = 0$ bis $t = 12$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{12} f(t)\,dt = \int_0^{12} \left(t^3 - 24t^2 + 144t\right)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - 8t^3 + 72t^2\right]_0^{12} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 12^4 - 8 \cdot 12^3 + 72 \cdot 12^2 - 0 \\ &= 1.728 \end{aligned}$$

Die Fläche besitzt einen Flächeninhalt von 1.728 FE.

Der Graph der Funktion f gibt an, wie viel Wasser zu einem bestimmten Zeitpunkt in den Bergsee fließt. Die Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse beschreibt somit die zugeflossene **Wassermenge**. Die obige Fläche zwischen $t = 0$ und $t = 12$ gibt also an, wieviel Wasser in den ersten 12 Stunden in den See geflossen sind; es waren 1.728 m^3.

e) **Berechnung des Wasserzuflusses in den ersten zwei Stunden** (11VP)

Das Wasserzufluss lässt sich wie oben als Fläche unter dem Graphen von f zwischen $t = 0$ und $t = 2$ berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2} f(t)\,dt &= \int_0^{2} \left(t^3 - 24t^2 + 144t\right)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - 8t^3 + 72t^2\right]_0^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 72 \cdot 2^2 - 0 \\ &= 228 \end{aligned}$$

In den ersten zwei Stunden sind 228 m^3 Wasser in den Bergseee geflossen.

Bestimmung eines Ansatzes für das Zeitintervall des maximalen Zuflusses

Ein vollkommen beliebiges Zeitintervall von 2 Stunden beginnt bei einer Zahl t_0 und reicht dann bis zwei Stunden später, also bis zur Zeit $t_0 + 2$. Die beiden Grenzen dieses Intervalls $[t_0;\, t_0 + 2]$ müssen dabei innerhalb des betrachteten Gesamtintervalls von $[0;\, 12]$ liegen, daher kann sich der Wert t_0 selbst nur maximal im Bereich $[0;\, 10]$ befinden.

Für das Volumen V des in diesem Intervall zugeflossenen Wassers gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
V(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0+2} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+2} \left(t^3 - 24t^2 + 144t\right)\,dt \\
&= \left[\frac{1}{4}t^4 - 8t^3 + 72t^2\right]_{t_0}^{t_0+2} \\
&= \left(\frac{1}{4}(t_0+2)^4 - 8(t_0+2)^3 + 72(t_0+2)^2\right) - \left(\frac{1}{4}t_0^4 - 8t_0^3 + 72t_0^2\right) \\
&= \frac{1}{4}(t_0+2)^4 - 8(t_0+2)^3 + 72(t_0+2)^2 - \frac{1}{4}t_0^4 + 8t_0^3 - 72t_0^2
\end{aligned}$$

Das Volumen $V(t_0)$ kann dabei als Funktion in Abhängigkeit von t_0 aufgefasst werden.

Um das Zeitintervall mit den Grenzen t_0 und $t_0 + 2$ zu finden, in dem die **meiste** Wassermenge zufließt, muss die Funktion $V(t_0)$ auf Maxima untersucht werden.