a) ▸ **Wahrscheinlichkeiten bestimmen** (6BE)

Sei Z die Anzahl der Einzelkinder. Dann ist Z binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = \frac{6{,}5}{21{,}3} \approx 0,3051$.

Berechne mit diesen Daten nun die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse:

$P(Z=2) = \binom{5}{2} \cdot (0,3051)^2 \cdot (0,6949)^3 = 0,3124$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 31,24% befinden sich in der Gruppe genau zwei Einzelkinder.

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1) &= 1 - P(Z=0) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \cdot (0,3051)^0 \cdot (0,6949)^5 \\ &= 1 - 0,1620 = 0,838 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 83,8% befindet sich in der Gruppe mindestens ein Einzelkind.

Beim dritten Ereignis wird weiter eingeschränkt. Von den 6,5 Mio. Einzelkindern leben 5 Mio. im früheren Bundesgebiet. Die Wahrscheinlichkeit für ein Einzelkind, das aus dem früheren Bundesgebiet stammt beträgt nach der Pfadregel also $p = 0,3051 \cdot \frac{5}{6{,}5} = 0,3051 \cdot 0,7692 = 0,2347$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} P(Z \leq 3) &= 1 - P(Z \geq 4) \\ &= 1 - (P(Z=4) + P(Z=5)) \\ &= 1 - \left(\binom{5}{4} \cdot 0,2347^4 \cdot 0,7653^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,2347^5 \cdot 0,7653^0\right) \\ &= 1 - (0,0116 + 0) \\ &= 0,9884 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,84% sind höchstens 3 der Kinder Einzelkinder aus dem früheren Bundesgebiet.

b) ▸ **Entscheidungsregel formulieren** (6BE)

Es werden 50 Kinder in ganz Deutschland befragt, ob sie Einzelkinder sind, wobei von einer Wahrscheinlichkeit von 35% ausgegangen wird. Sei X die Anzahl der Einzelkinder in der Stichprobe. Getestet wird die Hypothese $H_0 : p \leq 0{,}35$. Die Hypothese wird verworfen, wenn besonders **viele** Kinder angeben, Einzelkinder zu sein. Der **Ablehnungsbereich** hat also die Form $\overline{A} = \{k; \ldots; 50\}$. Aufgrund des Signifikanzniveaus von 5 % soll weiterhin gelten: $P(\overline{A}) = P(X \geq k) \leq 0{,}05$.

Prüfe nun die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 17)$. Ist diese Wahrscheinlichkeit **kleiner** als 0,05, so muss die Nullhypothese verworfen werden, da die 17 dann im **Ablehnungsbereich** liegt. Sonst wird die Nullhypothese beibehalten.

$$\begin{aligned} P(X \geq 17) &= 1 - P(X \leq 16) \\ &= 1 - 0{,}3889 \\ &= 0{,}6111 \end{aligned}$$

Da $P(X \geq 17) \approx 0{,}61 > 0{,}05$ ist, liegt die Zahl 17 noch im Annahmebereich. Die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}35$ wird **nicht** verworfen.

c) ▶ **Größe der Gruppe bestimmen** (5BE)

Der Anteil der Einzelkinder in Deutschland liegt bei $0,3051$. Von diesen geben 10% an, dass sie Geschwister hätten. Die Wahrscheinlichkeit für ein solches Einzelkind liegt nach der Pfadregel also bei $0,3051 \cdot 0,1 = 0,03051$.

Nun soll berechnet werden, wie groß eine Gruppe von Kindern aus ganz Deutschland sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens ein solches Einzelkind darunter zu finden ist. Das heißt:

$$\begin{aligned}
P(Z \geq 1) &> 0,99 \\
1 - P(Z=0) &> 0,99 && \mid -1 \\
-P(Z=0) &> -0,01 && \mid \cdot(-1) \\
P(Z=0) &< 0,01 && \mid n \text{ unbekannt}, p = 0,030501 \\
\binom{n}{0} \cdot 0,030501^0 \cdot 0,96949^n &< 0,01 \\
0,96949^n &< 0,1 && \mid \ln(\,) \\
n \cdot \ln(0,96949) &< \ln(0,01) && \mid : \ln(0,96949) \text{ Achtung: } \ln(0,96949) < 0 \\
n &> \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,96949)} \\
n &> 148,63
\end{aligned}$$

Es müsste ein Gruppe von mindestens 149 Kindern aus ganz Deutschland sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein Einzelkind darunter ist, das fälschlicherweise angibt, Geschwister zu haben.

d) ▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen** (5BE)

Sei Z die Anzahl der Einzelkinder, die bei einem alleinerziehenden Elternteil aufwachsen. Betrachte die Wahrscheinlichkeiten getrennt für Einzelkinder aus dem früheren Bundesgebiet und aus den neuen Bundesländern:

Von den Einzelkindern im früheren Bundesgebiet wachsen $0,23 + 0,06 = 0,29$, also 29% der Kinder bei einem alleinerziehenden Elternteil auf.

Von den Einzelkindern in den neuen Bundesländern wachsen 32% der Kinder bei einem alleinerziehenden Elternteil auf.

Nun ist eine Gruppe von 10 Kindern gegeben, von denen 7 aus dem alten Bundesgebiet und 3 aus den neuen Bundesländern kommen. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, dass mindestens drei dieser Kinder bei einem alleinerziehenden Elternteil aufwachsen, d.h. es soll

$$P(Z \geq 3) = 1 = P(Z \leq 2)\, 1 - (P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2))$$

bestimmt werden.

Du musst also die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $Z = 0$, $Z = 1$ und $Z = 2$ berechnen:

Für $Z = 0$ gibt es eine Möglichkeit:

- 0 Kinder aus dem früheren Bundesgebiet, 0 aus den neuen Bundesländern

Für $Z = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten:

- 1 Kind aus dem früheren Bundesgebiet, 0 aus den neuen Bundesländern
- 0 Kinder aus dem früheren Bundesgebiet, 1 aus den neuen Bundesländern

Für $Z = 2$ gibt es drei Möglichkeiten:

- 2 Kinder aus dem früheren Bundesgebiet, 0 aus den neuen Bundesländern
- 1 Kind aus dem früheren Bundesgebiet, 1 Kind aus den neuen Bundesländern
- 0 Kinder aus dem früheren Bundesgebiet, 2 Kinder aus den neuen Bundesländern.

Nach der Pfadregel ergeben sich für $P(Z = 0)$, $P(Z = 1)$ und $P(Z = 2)$:

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= \left(\tbinom{7}{0}\cdot 0,29^0\cdot 0,71^7\right)\cdot\left(\tbinom{3}{0}\cdot 0,32^0\cdot 0,68^3\right) \\ &= 0,029 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= \quad \left(\tbinom{7}{1}\cdot 0,29^1\cdot 0,71^6\right)\cdot\left(\tbinom{3}{0}\cdot 0,32^0\cdot 0,68^3\right) \\ &\quad + \left(\tbinom{7}{0}\cdot 0,29^0\cdot 0,71^7\right)\cdot\left(\tbinom{3}{1}\cdot 0,32^1\cdot 0,68^2\right) \\ &= \quad 0,082 + 0,04 = 0,122 \end{aligned}$$

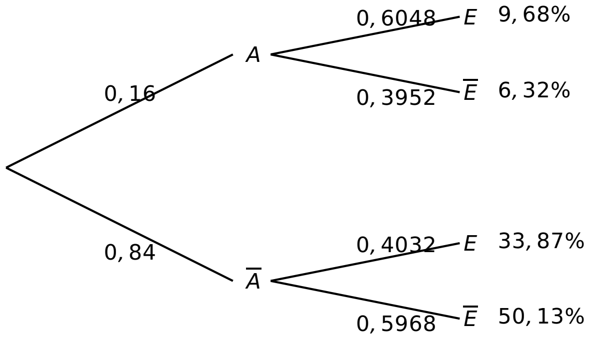
$$\begin{aligned} P(Z=2) &= \quad \left(\tbinom{7}{2}\cdot 0,29^2\cdot 0,71^5\right)\cdot\left(\tbinom{3}{0}\cdot 0,32^0\cdot 0,68^3\right) \\ &\quad + \left(\tbinom{7}{1}\cdot 0,29^1\cdot 0,71^6\right)\cdot\left(\tbinom{3}{1}\cdot 0,32^1\cdot 0,68^2\right) \\ &\quad + \left(\tbinom{7}{0}\cdot 0,29^0\cdot 0,71^7\right)\cdot\left(\tbinom{3}{2}\cdot 0,32^2\cdot 0,68^1\right) \\ &= \quad 0,1 + 0,1154 + 0,019 = 0,2344 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $P(Z \geq 3)$:

$$P(Z \geq 3) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - (0,029 + 0,122 + 0,2344) = 0,6146$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $61,46\%$ befinden sich in der Gruppe mindestens drei Einzelkinder, die von einem alleinerziehenden Elternteil aufgezogen werden.

e) ▸ **Situation graphisch darstellen** (8BE)



Sei A das Ereignis: „Alleinerziehend" und E das Ereignis „Einzelkind".
16% aller Haushalte sind alleinerziehend, also sind es 84% nicht.
Insgesamt gibt es 6.200 Haushalte. Bei einer Rate von 16% sind hiervon also 992 alleinerziehend. Von diesen werden in 600 Einzelkinder aufgezogen. Der Anteil der alleinerziehenden Haushalte mit Einzelkindern liegt also bei $\frac{600}{992} = 0,6048$.

Damit werden in 392 alleinerziehenden Haushalten keine Einzelkinder aufgezogen. Der Anteil der alleinerziehenden Haushalte ohne Einzelkinder liegt also bei $\frac{392}{992} = 0,3952$.
Wenn 992 Haushalte alleinerziehend sind, so sind $6.200-992 = 5.208$ Haushalte nicht alleinerziehend.
Insgesamt gibt es 10.000 Kinder der Stadt, darunter 2.700 Einzelkinder. Wenn 600 Einzelkinder in alleinerziehenden Haushalten aufgezogen werden, müssen 2.100 Einzelkinder in nicht-alleinerziehenden Haushalten aufgezogen werden. Der Anteil der nicht-alleinerziehenden Haushalte mit Einzelkindern beträgt also $\frac{2.100}{5.208} = 0,4032$.
In den restlichen $5.208-2.100 = 3.108$ nicht-alleinerziehenden Haushalten werden keine Einzelkinder aufgezogen, sondern die restlichen $10.000 - 2.700 = 7.300$ Kinder. Der Anteil der nicht-alleinerziehenden Haushalte ohne Einzelkinder liegt also bei $\frac{3.108}{5.208} = 0,5968$.

	Alleinerziehend	Nicht-alleinerziehend	Gesamt
mit Einzelkindern	600	2.100	2.700
ohne Einzelkinder	392	3.108	3.500
			6.200

▸ **Stochastische Unabhängigkeit prüfen**

Die Ereignisse A und E sind stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$:

Berechne zunächst die Einzelwahrscheinlichkeiten:

$P((A \cap E) = 0,0968$

$P(A) = 0,16$ und $P(E) = 0,0968 + 0,3387 = 0,4355$

$P(A) \cdot P(E) = 0,16 \cdot 0,4355 = 0,0696 \neq 0,0968$

Die Ereignisse A und E sind stochastisch abhängig. (30BE)