$A(-15\,|\,-10\,|\,2)$; $B(-15\,|\,-35\,|\,2)$; $C(9\,|\,-10\,|\,9)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -18,5 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 24 \\ -25 \\ 7 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

a) ▸ **Bestimmung einer Gleichung von E in Koordinatenform** (7BE)

Für die Ebene E durch die Punkte A, B und C gilt zunächst in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + r \left[\begin{pmatrix} -15 \\ -35 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + s \left[\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor dieser Ebene kann dabei über das Kreuzprodukt der Spannvektoren berechnet werden:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-25)\cdot 7 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 24 - 0 \cdot 7 \\ 0 \cdot 0 - (-25) \cdot 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -175 \\ 0 \\ 600 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt wurde hier innerhalb des Normalenvektors mit 25 gekürzt. Dies ist jedoch nur zulässig, da der Normalenvektor ein **Richtungvektor** ist, bei allen anderen Vektoren darf man dies nicht tun!

Für E ergibt sich in Normalen- und damit Koordinatenform:

$$E: \quad \vec{n}_E \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$-7x + 24z - (105 + 0 + 48) = 0$$

$$-7x + 24z - 153 = 0$$

▸ **Betrachtung der Lage von E und der x-z-Ebene**

E ist **nicht** parallel zur x-z-Ebene, da die Koordinatengleichung von E nicht nur den Parameter y enthält. Da hier jedoch extra die Lagecharakterisierung der beiden Ebenen gefordert ist, wird vermutet, dass die Ebenen doch eine besondere Lage zueinander haben, z.B. dass sie senkrecht aufeinander stehen. Dies ist der Fall, wenn die beiden Normalenvektoren der Ebenen senkrecht aufeinander stehen, wenn also ihr Skalarprodukt Null beträgt:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Das Skalarprodukt beträgt Null, daher sind die beiden Ebenen senkrecht zueinander.

▸ Nachweis der Parallelität von g zu E

Um die Lage von g zur Ebenen E nachzuweisen, wird durch Einsetzen der Koordinaten von g versucht, ein Schnittpunkt zu berechnen:

$$\begin{aligned} g \cap E: \ -7(-18,5+24t)+24(14+7t)-153 &= 0 \\ 129,5-168t+336+168t-153 &= 0 \\ -306 &= 0 \ ↯ \end{aligned}$$

Es gibt keinen Schnittpunkt von g mit E, also verläuft g **parallel** zu E (und liegt nicht in ihr).

b) **▸ Bestimmung des Punktes X** (8BE)

X sei der gesuchte Punkt auf der Geraden.

Der Punkt X hat von allen drei Punkten denselben Abstand, es gilt also $\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{CX}$ und damit gleichzeitig auch $|\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{CX}|$.

Da X auf der Geraden g liegt, hat X allgemein die Koordinaten $X(-18,5+24t \mid -10-25t \mid 14+7t)$. Es lässt sich also sagen:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AX}| &= |\overrightarrow{BX}| \\ \left|\begin{pmatrix} -18,5+24t \\ -10-25t \\ 14+7t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} -18,5+24t \\ -10-25t \\ 14+7t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ -35 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \\ \left|\begin{pmatrix} -3,5+24t \\ -25t \\ 12+7t \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} -3,5+24t \\ 25-25t \\ 12+7t \end{pmatrix}\right| \\ \sqrt{(-3,5+24t)^2+(-25t)^2+(12+7t)^2} &= \sqrt{(-3,5+24t)^2+(25-25t)^2+(12+7t)^2} \\ (-3,5+24t)^2+(-25t)^2+(12+7t)^2 &= (-3,5+24t)^2+(25-25t)^2+(12+7t)^2 \\ (-25t)^2 &= (25-25t)^2 \\ 625t^2 &= 625-1250t+625t^2 \\ 1250t &= 625 \\ t &= 0,5 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Geradengleichung von g liefert den Ortsvektoren von X:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -18,5 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 24 \\ -25 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,5 \\ -22,5 \\ 17,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X(-6,5 \mid -22,5 \mid 17,5)$$

Wie man sieht, muss der gegebene Abstand der drei Punkte vom Punkt X gar nicht nötig zur Berechnung seiner Koordinaten, der Abstand lässt sich allerdings dazu verwenden, das gewonnene Ergebnis zu überprüfen!

▶ Berechnung des Gradmaßes des gesuchten Winkels

Da der Mast senkrecht auf der x-y-Ebene steht, wird er durch den Normalenvektor der x-y-Ebene dargestellt, welcher dem Einheitsvektor der z-Achse entspricht. Der gesuchte Winkel φ ist also der eingeschlossene Winkel zwischen dem Normalenvektor und dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}_g \circ \vec{n}_{xy}}{|\vec{u}_g| \cdot |\vec{n}_{xy}|} = \frac{\begin{pmatrix} 24 \\ -25 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1250} \cdot \sqrt{1}} = \frac{7}{\sqrt{1250}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 78,58$$

Die Gerade schneidet den Mast unter einem Winkel von 78,58°.