a) (1) ▶ **Nullstellen von $f$ berechnen** (13P)

Setze $f(x) = 0$ und löse die Gleichung nach $x$.

(2) ▶ **Koordinaten der Extrempunkte berechnen**

Eine Funktion besitzt eine Extremstelle an der Stelle $x_E$, wenn gilt:

- notwendige Bedingung $f'(x_E) = 0$,
- hinreichende Bedingung $f''(x_E) > 0$ für ein Minimum; $f''(x_E) < 0$ für ein Maximum.

Bestimme also im ersten Schritt die ersten beiden Ableitungen von $f$ nach der Potenzregel und löse dann die Gleichung $f'(x) = 0$, um lokale Extremstellen zu bestimmen.

b) (1) ▶ **Funktionsterm nachweisen** (8P)

Überlege, wie der Graph von $f$ verschoben werden muss, damit der Wendepunkt $W(-1 \mid 2)$ im Ursprung des Koordinatensystems liegt:

- Er muss um eine Einheit in positive $x$-Richtung verschoben werden, also nach „rechts“
- Er muss um 2 Einheiten in negativen $y$-Richtung verschoben werden, also nach „unten“.

Den Graphen einer Funktion $f$ verschiebst du um $a$ Einheiten in $x$-Richtung und um $b$ Einheiten in$y$-Richtung durch
$f(x-a)+b$.
Setze also $a$ und $b$ entsprechend ein und forme den Term so um, dass sich der Term aus der Aufgabenstellung ergibt.

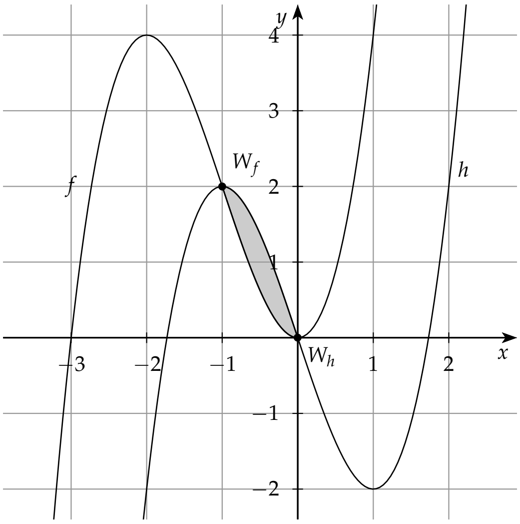
▶ **Punktsymmetrie begründen**

Du sollst begründen, dass der Graph von $f$ punktsymmetrisch zu seinem Wendepunkt ist und dabei den Graphen der verschobenen Funktion $h$ zu Hilfe nehmen. Betrachte also zunächst das Symmetrieverhalten des Graphen von $h$ und schließe dann auf das Symmetrieverhalten des Graphen von $f$.
Überlege dabei: Der Graph von $f$ ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(-1 \mid 2)$, wenn der Graph von $h$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Betrachte den Funktionsterm von $h$: Es kommen nur **ungerade** Hochzahlen vor. Also ist der Graph von $h$ punktsymmetrisch zum Ursprung.
*Alternativ* kannst du auch die Bedingung für Punktsymmetrie argumentieren:
$h(-x) = (-x)^3 - 3\cdot(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3+3x) = -h(x)$.
Es gilt $h(-x) = -h(x)$. Also ist der Graph von $h$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

Durch die Verschiebung verändert sich das Symmetrieverhalten nicht, nur der Symmetriepunkt wird verschoben: Also ist der Graph von $f$ punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(-1 \mid 2)$.

c) (1) ► **Flächeninhalt berechnen** (14P)



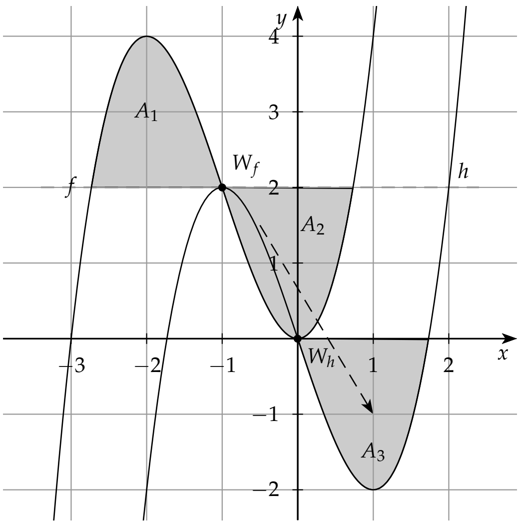

Bei beiden Graphen schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Die Grenzen der Fläche sind dabei die **Schnittstellen** der Funktionen $f$ und $h$. Du kannst so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die beiden Schnittstellen $x_1$ und $x_2$; setze dazu die Funktionsterme gleich. Du kannst sie auch mit deinem GTR bestimmen.
- Berechne im zweiten Schritt den Inhalt der eingeschlossenen Fläche mit dem Hauptsatz der Integralrechnung oder ebenfalls mit dem GTR.

(2) ► **Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen**

Die Gerade $p$ verläuft durch den Wendepunkt des Graphen von $f$ und ist parallel zur $x$-Achse. Sie ist also eine waagerechte Gerade mit der Gleichung $y = 2$.

Sieh dir die eingeschlossene Fläche in einer Abbildung an.




Der Graph von $f$ ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W_f$. Also sind die Flächenstücke $A_1$ und $A_2$ gleich groß.

Der Graph von $h$ entsteht durch Verschiebung des Graphen von $f$: Du erkennst, dass auch die Fläche $A_3$ den gleichen Flächeninhalt wie $A_1$ und $A_2$ besitzt.

Für den Inhalt $A$ der Fläche, den der Graph von $f$ mit der Geraden einschließt, gilt also:

$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot A_3$

Du kannst so vorgehen:

- Berechne die Nullstellen der Funktion $h$, denn sie bilden die Grenzen der Fläche $A_3$
- Bestimme dann den Inhalt von $A_3$ über den Hauptsatz der Integralrechnung oder mit dem GTR

d) (1) ▶ **Gleichung von $w_a$ ermitteln** (15P)

Eine Tangente ist eine Gerade und hat somit allgemein die Gleichung

$w_a : y = m_a x + b_a$

Dabei hat sie die gleiche Steigung wie die zugehörige Funktion im Berührpunkt. Die Steigung einer Funktion wird beschrieben durch die ihre erste Ableitung. Da die Tangente an den Graphen von $f_a$ im Punkt $W_a$ anliegt, gilt für ihre Steigung $m_a$:

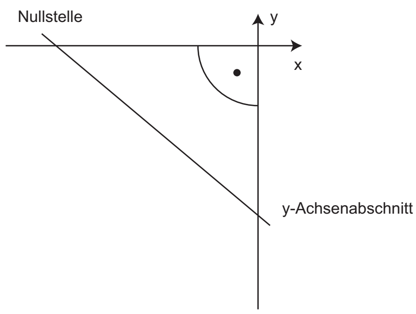
$m_a = f_a'(x_W)$.

Du kannst deshalb so vorgehen:

- Berechne die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von $f_a$,
- bestimme die erste Ableitung $f_a'$ von $f_a$ und berechne die Steigung $m_a$
- Setze $m_a$ und die Koordinaten des Wendepunkts in die Tangentengleichung ein und löse nach $b_a$ auf.

▶ **Flächeninhalt berechnen**

Der dritte Quadrant ist der Quadrant „links unten“: hier liegen die Punkte mit negativer $x$- und negativer $y$-Koordinate. Du kannst eine Skizze anfertigen.




- Die Steigung $-\frac{1}{3}a^2$ ist für jeden Wert von $a$ **negativ**. Also fällt die Tangente.
- Da die Fläche im dritten Quadranten liegen soll, wird die Fläche nach rechts durch die $y$-Achse begrenzt, also durch $x = 0$. Nach links wird sie durch die Nullstelle der Tangente begrenzt.
- Ebenso wird die Fläche nach oben durch die $x$-Achse begrenzt. Nach unten wird sie durch die Schnittstelle der Tangente mit der $y$-Achse begrenzt.
- Die eingeschlossene Fläche ist also ein **rechtwinkliges Dreieck**: Die beiden Katheten liegen auf der $x$-Achse und der $y$-Achse; die Hypotenuse auf der Tangente.

Berechne also Nullstelle und $y$-Achsenabschnitt der Tangente und bestimme dann den Flächeninhalt des Dreiecks.