a) **► Bestimmen des Definitionsbereichs von f_a und der Gleichungen der Asymptoten von G_a** (7P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den Definitionsbereich der Funktionenschar f_a und die Gleichungen aller Asymptoten der zugehörigen Graphen G_a bestimmen. Die Definitionsmenge von f_a umfasst alle Werte, welche für x eingesetzt werden dürfen. Da f_a eine gebrochenrationale Funktion ist, sind das die x-Werte, für die der Nenner gleich Null wird, denn durch Null darf nicht geteilt werden. Diese Stellen müssen dann aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.
Außerdem hat f_a an den oben genannten Stellen Polstellen. Du hast somit also auch direkt die Gleichung der Polgeraden von G_a bestimmt.
Um nun noch die restlichen Asymptoten von G_a zu bestimmen, betrachtest du die Funktionsgleichung von f_a und bestimmst zunächst die Grenzwerte aller Summanden getrennt und bestimmst daraus dann den Grenzwert der gesamten Funktion. Entspricht dieser ebenfalls einer Funktion, so nähert G_a für hohe Werte von x dem Graphen dieser Funktion an. Dieser entspricht also der Asymptoten von G_a.
Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der Nullstellen des Nenners der Funktionsgleichung von f_a
2. Schritt: Bestimmen der restlichen Asymptoten von G_a

► Zuordnen der vorgegebenen Graphen und der zugehörigen Parameterwerte von a

Hier ist es nun deine Aufgabe, die vorgegebenen Graphen G_I, G_{II} und G_{III} den zugehörigen Parameterwerten von a $(1; 2; \frac{1}{5})$ zuzuordnen. Verwende dazu die Informationen aus dem vorherigen Aufgabenteil. Die Graphen G_a haben einen Polgerade bei $x = \dfrac{1}{a}$ und nähern sich für größere Werte von x an die Graphen von $y = ax$ an.

- Für den Parameterwert $a = 1$ hat der zugehörige Graph also eine Polgerade bei $x = \dfrac{1}{a} = 1$ und nähert sich für größere Werte von x an den Graphen von $y = ax = x$ an.
- Für den Parameterwert $a = 2$ hat der zugehörige Graph also eine Polgerade bei $x = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$ und nähert sich für größere Werte von x an den Graphen von $y = ax = 2x$ an.
- Für den Parameterwert $a = \frac{1}{5}$ hat der zugehörige Graph also eine Polgerade bei $x = \dfrac{1}{a} = 5$ und nähert sich für größere Werte von x an den Graphen von $y = ax = \frac{1}{5}x$ an.

b) **► Zeigen, dass E ein lokaler Extrempunkt aller G_a ist und Ermitteln seiner Art** (17P)

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass $E(0 \mid f_a(0))$ ein lokaler Extrempunkt aller Graphen G_a ist und dessen Art ermitteln.
Für eine Extremstelle bei x_E müssen folgende zwei Bedingungen gelten:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$

Außerdem gilt weiterhin:

- Aus $f_a''(x_E) > 0$ folgt, dass die Funktion f_a bei x_E ein Minimum hat.
- Aus $f_a''(x_E) < 0$ folgt, dass die Funktion f_a bei x_E ein Maximum hat.

Damit also f_a bei $x = 0$ eine Extremstelle hat muss gelten $f_a'(0) = 0$ und $f_a''(0) \neq 0$. Du musst daher zunächst die zweite Ableitung von f_a bestimmen (die erste ist bereits gegeben) und dann in die erste und in die zweite Ableitung von f_a jeweils Null einsetzen. Damit zeigst du, dass $E(0 \mid f_a(0))$ ein lokaler Extrempunkt aller Graphen G_a ist und ermittelst dessen Art.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der zweiten Ableitung von f_a
2. Schritt: Überprüfen der notwendigen Bedingung für eine Extremstelle bei $x = 0$
3. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung für eine Extremstelle bei $x = 0$

▶ Bestimmen der Koordinaten von T und Nachweis, dass es ein Tiefpunkt ist

Nun sollst du die Koordinaten des zweiten Extrempunkts T der Graphen G_a bestimmen und nachweisen, dass es sich dabei um einen Tiefpunkt handelt. Aus der vorherigen Aufgabe kennst du bereits die Bedingungen für eine Extremstelle. Du musst nun also den Funktionsterm von f_a' mit Null gleichsetzen, um mit Hilfe der notwendigen Bedingung alle potentiellen Extremstellen von f_a zu bestimmen. Diese setzt du dann in die Funktionsgleichung von f_a'' ein und überprüfst die hinreichende Bedingung und bestimmst außerdem die Art der Extremstelle.
Danach musst du die bestimmten Extremstellen noch in die Funktionsgleichung von f_a einsetzen, um so die y-Koordinate des zugehörigen Extrempunkts zu bestimmen.

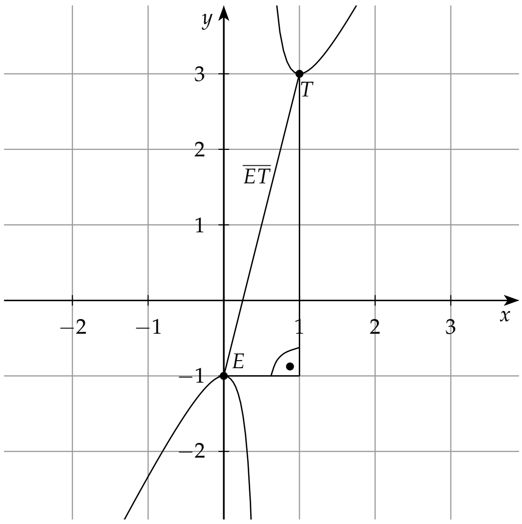
Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen mit Hilfe der notwendigen Bedingung
2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung für die potentiellen Extremstellen
3. Schritt: Bestimmen der y-Koordinate des Tiefpunkts T

▶ Berechnen der Werte von a, für die die Punkte E und T einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben

In diesem Aufgabenteil sollst du nun diejenigen Werte von a berechnen, für die die Punkte E und T einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben. Der Abstand d der beiden Punkte voneinander ist über die Hypothenuse des, in der Zeichnung erkennbaren, Dreiecks definiert. Die Längen der beiden Katheten sind dabei einmal durch die Differenz der x-Koordinaten und einmal durch die Differenz der y-Koordinaten gegeben. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du dann über folgende Gleichung für den Abstand d von E und T aufstellen:

$d = \sqrt{\left(\frac{2}{a} - 0\right)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{\frac{4}{a^2} + 16}$

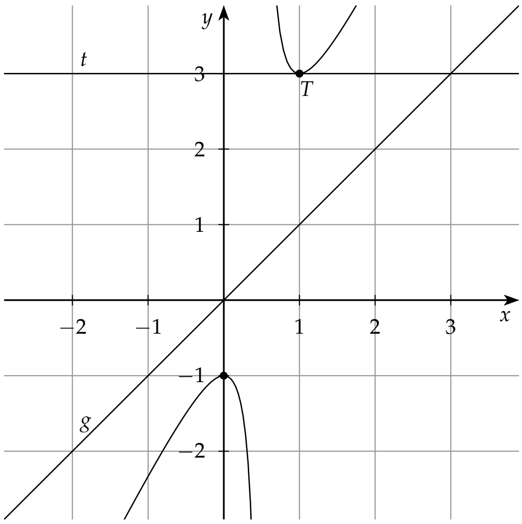


c) **▶ Bestimmen der Gleichung von g** (6P)

Hier ist es nun deine Aufgabe die Gleichung der Ursprungsgerade g so zu bestimmen, dass sich die Tangente t an den Graphen G_2 im Punkt T und g im Winkel von 45° schneiden. Für die Funktionsgleichung der Ursprungsgeraden g kannst du zunächst allgemein schreiben:

$g(x) = m \cdot x$

m entspricht dabei der Steigung der Geraden g.
Da die Steigung von G_2 in seinem Tiefpunkt T gleich Null sein muss (siehe notwendige Bedingung), hat auch die Tangente t die Steigung Null und verläuft parallel zur x-Achse. Es gilt: $t(x) = 3$. Durch Verbinden des Ursprungs, des Schnittpunkts von t und der y-Achse und des Schnittpunkts von g und t erhältst du, wie die Skizze zeigt, ein Steigungsdreieck von der Ursprungsgerade g. Die Steigung m einer Gerade erhält man dann, in dem man die Differenz in y-Richtung durch die Differenz in x-Richtung teilt. Das entspricht der Länge der Kathete die parallel zur y-Achse verläuft geteilt durch die Länge der Kathete die parallel zur x-Achse verläuft.



Benennt man nun den Schnittwinkel zwischen g und t mit α, dann entspricht der Tangens von α dem gleichen Wert. Es gilt also:

$\tan(\alpha) = m$.

▶ Berechnen des Flächeninhalts A des Dreiecks

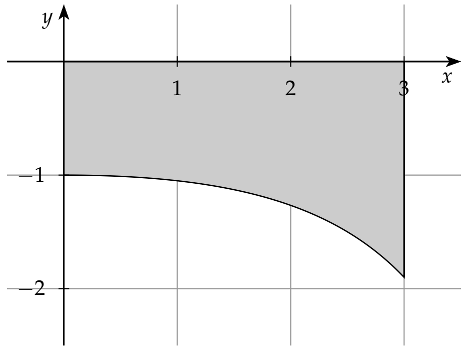
In diesem Aufgabenteil sollst du den Flächeninhalt A des Dreiecks berechnen, welches durch die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = x$ und die Tangente t begrenzt wird. Dieses Dreieck ist in der Skizze des vorherigen Aufgabenteils bereits eingezeichnet. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt allgemein:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Dabei entspricht g der Länge einer beliebig wählbaren Grundseite des Dreiecks und h der Länge der zugehörigen Höhe. Diese muss dabei senkrecht zur Grundseite sein. Aus der vorherigen Aufgabe weißt, dass das Dreieck ein Steigungsdreieck von g ist und damit rechtwinklig. Daher bietet es sich an, eine der Katheten als Grundseite und die andere als Höhe zu wählen, denn diese stehen bereits senkrecht zu einander. Die Längen der beiden Katheten entsprechen der x- und der y-Koordinate des Schnittpunkts S von g und t.

d) **► Berechnen des Inhalts I der Fläche** (5BE)

Hier ist es nun deine Aufgabe, den Inhalt I der Fläche, die durch den Graphen $G_{\frac{1}{5}}$, die Gerade $x = 3$ und die Koordinatenachsen eingeschlossen wird. Den Flächeninhalt zwischen einem Graphen und der x-Achse berechnest du mit einem Integral über der Funktion des Graphen mit den jeweiligen Integralgrenzen. Diese liegen in diesem Fall bei der y-Achse also bei $x = 0$ und bei der Geraden, also bei $x = 3$, wie die Skizze verdeutlicht. Für den gesuchten Flächeninhalt I gilt also:



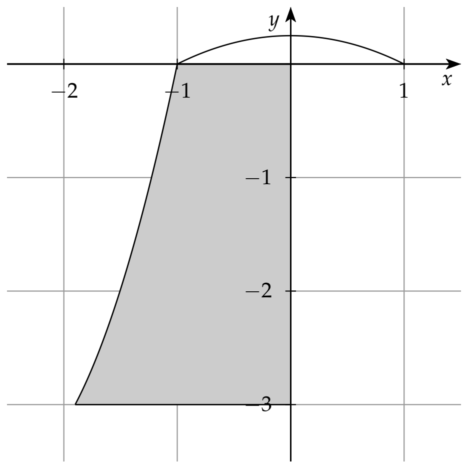
$$I = \int_0^3 f_{\frac{1}{5}}(x)\mathrm{d}x.$$

Zum Berechnen des Integrals benötigst zunächst einmal die Funktionsgleichung von $f_{\frac{1}{5}}$. Berechne dann mit Hilfe einer Stammfunktion von $f_{\frac{1}{5}}$ das Integral. Betrachten dafür zunächst die, durch die Addition verbundenen, Summanden getrennt.

e) **► Ermitteln der Gleichung eines Graphen, zur Beschreibung des Dachquerschnittes** (5BE)

In diesem Aufgabenteil sollst du nun die Gleichung eines Graphen, der die obere Begrenzung des Dachquerschnittes beschreibt, ermitteln.

Das Dach soll dabei für ein Kassenhäuschen gebaut werden, dessen Form man erhält, indem man die in Aufgabe d) beschriebene Fläche um 90° im Uhrzeigersinn dreht und diese dann um die y-Achse rotieren lässt. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die gedrehte Fläche und die Parabel p für den Dachquerschnitt. Für die Funktionsgleichung von p gilt, auf Grund der (in der Skizze erkennbaren) Achsensymmetrie, allgemein:



$$p(x) = ax^2 + b$$

An Hand dieser Skizze kannst du erkennen, dass der Punkt P auf dem Graphen der Parabel liegt. Seine Koordinaten $P(-1\,|\,0)$ müssen also die gesuchte Funktionsgleichung der Parabel p lösen.

Außerdem soll der Flächeninhalt des Dachquerschnittes, welcher dem Integral über p von -1 bis 1 entspricht, $\frac{1}{3}$ Flächeneinheiten groß sein. Damit erhältst du folgendes Gleichungssystem:

$$I \quad 0 = a \cdot 1^2 + b$$

$$II \quad \frac{1}{3} = \int_{-1}^{1} (ax^2 + b)\mathrm{d}x$$