1.1 **▶ Erste Ableitung bestimmen** (17BE)

Bestimme den Term der ersten Ableitung nach der Kettenregel und der Potenzregel. Beachte außerdem die besondere Ableitung der ln-Funktion.

$$f'(x) = -\frac{1}{\frac{7}{2}x^2+1} \cdot \frac{14}{2}x = \frac{-14x}{2\cdot\left(\frac{7}{2}x^2+1\right)} = \frac{-14x}{7x^2+2}$$

▶ Symmetrieverhalten untersuchen

1. Schritt: Symmetrie von f

Betrachte den Term $f(-x)$:

- Falls $f(-x) = f(x)$, so liegt eine Achsensymmetrie des Graphen zur y-Achse vor
- Fall $f(-x) = -f(x)$, so liegt eine Punktsymmetrie des Graphen zum Ursprung vor.

$$f(-x) = -\ln\left(\frac{7}{2}\cdot(-x)^2+1\right)+4 = -\ln\left(\frac{7}{2}x^2+1\right)+4$$

Ein Vergleich zeigt: $f(-x) = f(x)$. Also ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.

2. Schritt: Symmetrie von f'

Betrachte $f'(-x)$.

$$f'(-x) = \frac{-14\cdot(-x)}{7\cdot(-x)^2+2} = \frac{14x}{7x^2+2}$$

Ein Vergleich zeigt: $f'(-x) = -f'(x)$. Also ist der Graph von f' punktsymmetrisch zum Ursprung.

▶ Maximale Definitionsmengen bestimmen

1. Schritt: Funktion f

f ist eine logarithmische Funktion. Wichtige Überlegung: $\ln(z)$ ist nur definiert für $z > 0$. Es muss also gelten: $\frac{7}{2}x^2+1 > 0$. Untersuche, für welche Werte von x dies erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}x^2+1 &> 0 \qquad \mid -1 \\ \frac{7}{2}x^2 &> -1 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt: Aufgrund des Quadrats ist die rechts Seite stets positiv und damit **immer** größer als -1.

Für den Definitionsbereich D_f folgt damit: $D_f = \mathbb{R}$.

2. Schritt: Funktion f'

f' ist eine gebrochenrationale Funktion. Der **Nenner** einer solchen Funktion darf nicht den Wert Null annehmen. Untersuche also, für welche x der Nenner Null wird:

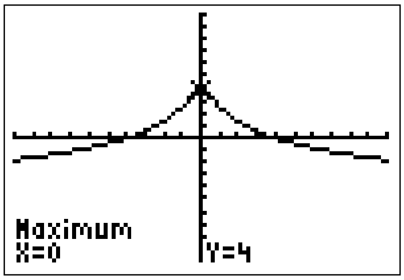
$$\begin{aligned} 7x^2+2 &= 0 \qquad \mid -2 \\ 7x^2 &= -2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung. Aufgrund des Quadrats bleibt die rechte Seite stets positiv und kann niemals den Wert -2 annehmen. Das heißt: Der Nenner im Funktionsterm von f' kann **niemals** Null werden. Damit liegen auch keine Definitionslücken vor und für den Definitionsbereich $D_{f'}$ gilt: $D_{f'} = \mathbb{R}$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

1.2 ▶ Koordinaten der lokalen Extrempunkte ermitteln

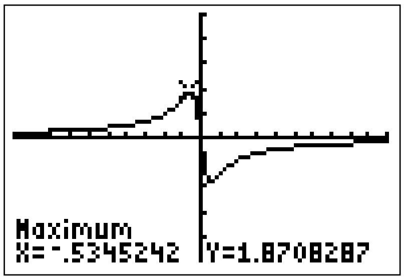
Zeichne den Graphen von f und bestimme die Koordinaten des Hochpunktes mit `2nd → TRACE (CALC) → maximum`.



Der Graph von f besitzt den Hochpunkt $H\,(0 \mid 4)$.

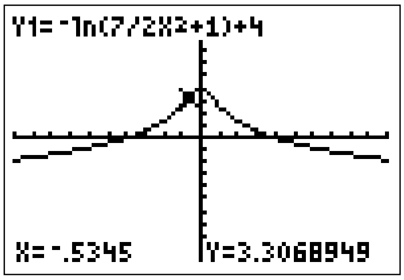
▶ Punkte mit maximaler Steigung bestimmen

Gesucht sind die Extremstellen von f'. Zeichne den Graphen von f' und bestimme die Koordinaten des Hochpunktes mit `2nd → TRACE (CALC) → maximum`.

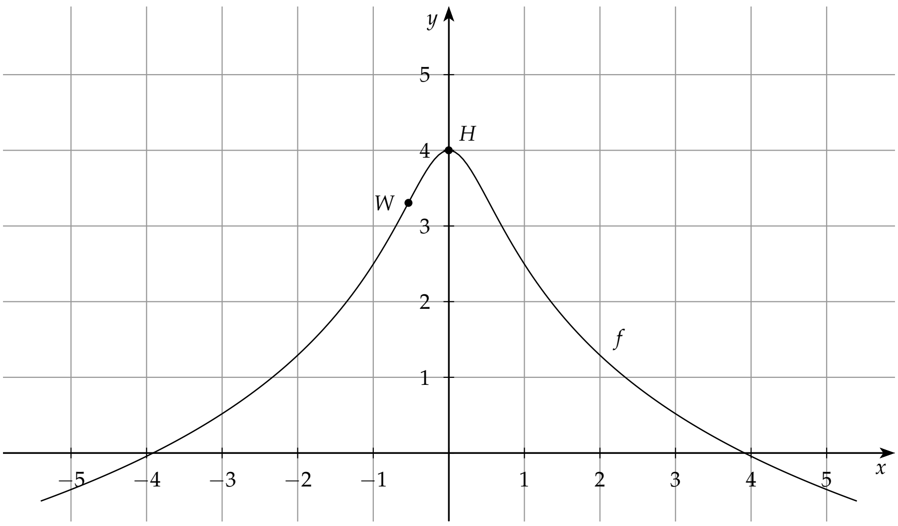


Der Punkt mit **maximaler Steigung** liegt an der Stelle $x \approx -0{,}5345$ vor.

Bestimme noch die zugehörige y-Koordinate. Zeichne dazu den Graphen von f. Wähle `TRACE` und gib die x-Koordinate $-0{,}5345$ ein. Der GTR liefert den Punkt mit maximaler Steigung $W\,(-0{,}5345 \mid 3{,}31)$



▶ Graph von f skizzieren



2.1 ▶ Graphen zuordnen und begründen (8BE)

In Aufgabenteil 1.1 hast du gezeigt, dass der Graph von f' punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft. Deshalb ist offensichtlich G_2 der Graph von f' und G_1 der Graph von f''.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Weitere mögliche Gründe sind:

- G_1 schneidet die x-Achse da, wo G_2 Extrempunkte besitzt. Also muss G_1 die erste Ableitung von G_2 sein.
- G_2 besitzt einen Tiefpunkt da, wo G_1 einen Wendepunkt besitzt. Also muss G_1 die erste Ableitung von G_2 sein.
- G_2 steigt in den Bereichen, in denen G_1 oberhalb der x-Achse verläuft und fällt in den anderen. Also beschreibt G_1 das Steigungsverhalten von G_2 und stellt folglich die erste Ableitung von G_2 dar.

2.2 ▶ **Volumen des Rotationskörpers berechnen**

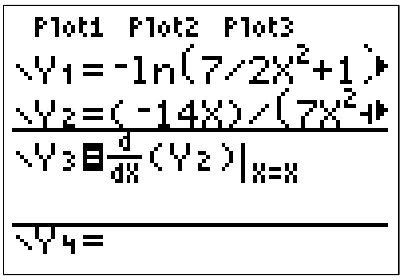
Aus Material 1 geht hervor, dass G_2 über dem gesamten Intervall $[-4;-1]$ **oberhalb** von G_1 verläuft. Für den Inhalt A der eingeschlossenen Fläche gilt deshalb:

$$A = \int_{-4}^{-1} \left(f'(x) - f''(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

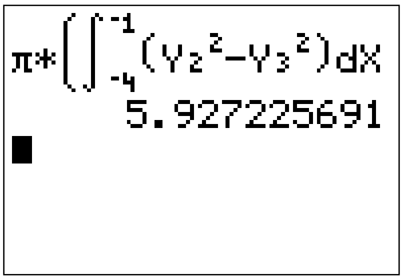
Diese Schnittfläche rotiert nun um die x-Achse und erzeugt einen Rotationskörper mit Volumen V. In deiner Formelsammlung findest du die entsprechende Formel:

$$V = \pi \cdot \int_{-4}^{-1} \left(f'(x)^2 - f''(x)^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Speichere die Funktion f' als Y2. f'' ist die erste Ableitung von f' und als Funktion Y3 gespeichert werden. Mit `Math → nDeriv` gibst du deinem GTR den Befehl für „Ableiten". Die Funktion Y2 findest du dabei unter `VARS → Y-VARS → Function → Y2`.
Wähle als Auswertungsstelle $x = x$, um die Ableitungsfunktion auf dem gesamten Definitionsbereich zu definieren.



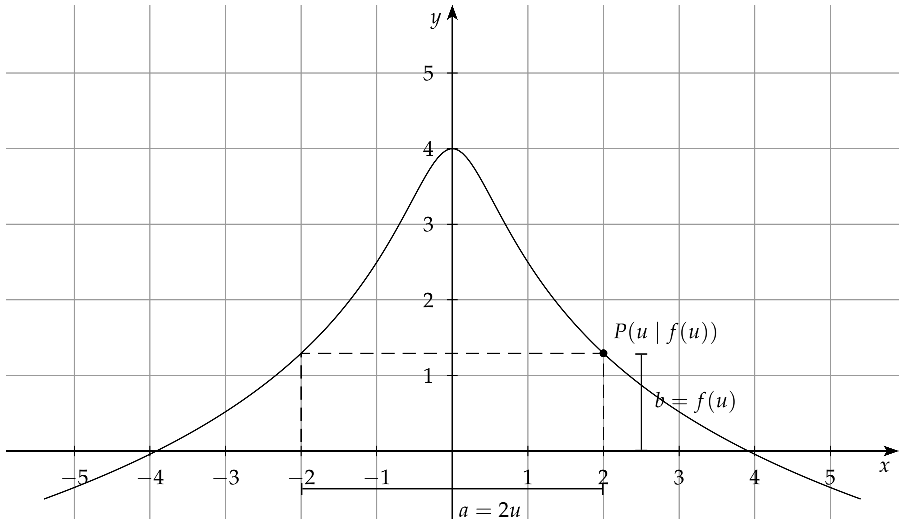
Wechsle nun mit `2nd → MODE (QUIT)` ins „normale" Rechenmenü und gib die Formel zur Berechnung des Rotationskörpers ein. Verwende für $f'(x)$ und $f''(x)$ die Funktionen Y2 und Y3. Den Befehl für „Integrieren" findest du unter `Math → fnInt`. Vergiss die Quadrate nicht!



Das Volumen des Rotationskörpers beträgt etwa 5,927 VE.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

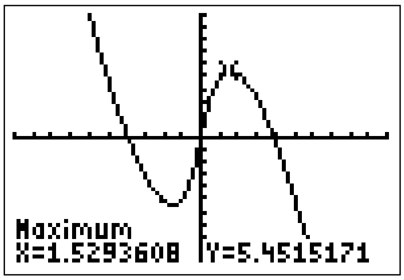
3. ▶ **Koordinaten der Eckpunkte und Flächeninhalt bestimmen** (8BE)



Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt: $A(u) = a \cdot b = 2u \cdot f(u)$.

Gesucht ist u so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.

Zeichne den Graphen von A. Nutze beim Speichern des Definitionsterms die bereits unter Y1 gespeicherte Funktion f. Mit `VARS` → `Y-VARS` → `Function` → `Y1` kannst du sie aufrufen. Bestimme mit `2nd` → `TRACE (CALC)` → `Maximum` die Koordinaten des Hochpunktes.



Der GTR liefert den Hochpunkt $H\,(1{,}529 \mid 5{,}45)$. Für $u \approx ,53$ wird der Flächeninhalt des Rechtecks mit 5,45 FE also maximal.

Nun zu den Koordinaten der Eckpunkte. Allgemein lauten diese:

$P_1\,(u \mid 0)$, $P_2\,(u \mid f(u))$, $P_3\,(-u \mid f(u))$ und $P_4\,(-u \mid 0)$.

Mit $f(1{,}53) \approx 1{,}78$ folgen die Punkte

$P_1\,(1{,}53 \mid 0)$, $P_2\,(1{,}53 \mid 1{,}78)$, $P_3\,(-1{,}53 \mid 1{,}78)$ und $P_4\,(-1{,}53 \mid 0)$

4. ▶ **Umkehrbarkeit zeigen** (7BE)

f ist für $x > 0$, wenn f in diesem Bereich **streng monoton** ist. Der Graph von f muss für $x > 0$ also durchweg **steigen** oder **fallen**.

Betrachte die erste Ableitung von f:

$f'(x) = \dfrac{-14x}{7x^2+2}$. Der **Nenner** im Funktionsterm ist für alle $x > 0$ **positiv**, der Zähler ist für $x > 0$ **negativ**. Damit gilt: $f'(x) < 0$ für alle $x > 0$. Die Funktion f ist also streng monoton fallend für $x > 0$ und damit umkehrbar für $x > 0$.

▶ **Rechenschritte erklären**

Im ersten Schritt wird die Funktionsgleichung von f betrachtet und die Seite $f(x)$ durch y ersetzt.

Vom ersten zum zweiten Schritt wird auf beiden Seiten die 4 subtrahiert und anschließend auf beiden Seiten mit (-1) multipliziert.

Vom zweiten zum dritten Schritt wird auf beiden Seiten der Gleichung die e-Funktion angewandt und so der ln eliminiert.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

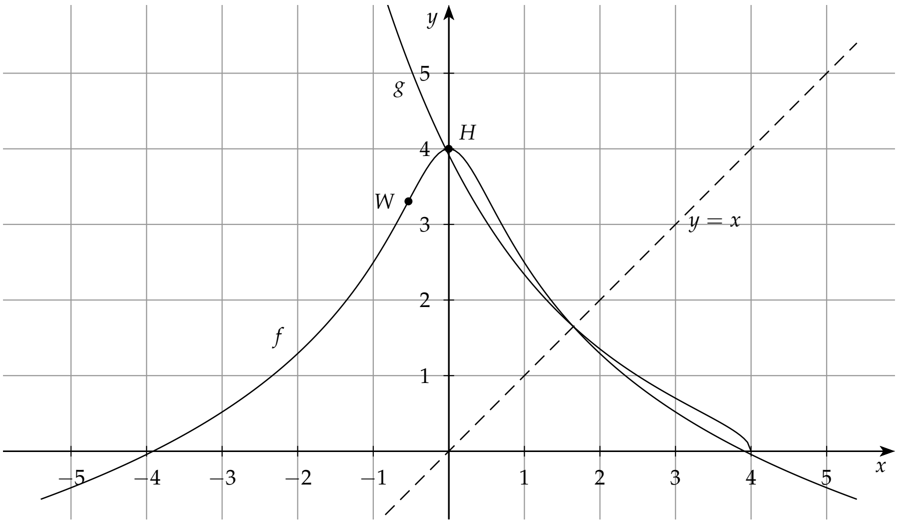
Vom dritten zum vierten Schritt wird die Variable x^2 isoliert, indem auf beiden Seiten zuerst 1 subtrahiert und dann mit $\frac{2}{7}$ multipliziert wird.

Im fünften Schritt wird die Wurzel gezogen. Im sechsten Schritt findet ein Variablentausch statt: x und y werden getauscht.

Die Gleichung $y = g(x) = \sqrt{\frac{2}{7} \cdot (\mathrm{e}^{4-x} - 1)}$ ist die Funktionsgleichung der **Umkehrfunktion** von f für $x > 0$.

► Graph von g herleiten und skizzieren

Der Graph der Umkehrfunktion g entsteht durch **Spiegelung** des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$:



Anmerkung: g und f besitzen **nicht** den selben Definitionsbereich! g ist für alle x definiert, für die der Ausdruck unter der Wurzel **nicht negativ** wird:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{7} \cdot \mathrm{e}^{4-x} - 1 &\geq 0 && \mid \cdot \tfrac{7}{2} \\
\mathrm{e}^{4-x} - 1 &\geq 0 && \mid +1 \\
\mathrm{e}^{4-x} &\geq 1 && \mid \ln(\,) \\
4 - x &\geq \ln(0) = 1 && \mid +x \\
x &\leq 4
\end{aligned}
$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.