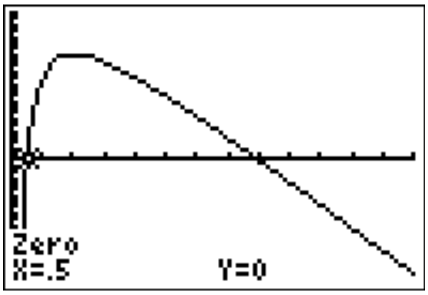
a) ► **Schnittpunkte des Graphen von s mit der x-Achse bestimmen** (4P)

Betrachtet wird Funktion s, welche die Steigung der Aktivität (in %) des Medikaments in Abhängigkeit von der täglichen Dosis x (in mg/kg Körpergewicht) repräsentiert.

Für $0,5 \leq x \leq 12$ gilt näherungsweise:

$s(x) = 34 - 4x - \dfrac{16}{x}.$



Um die Aufgabe mit dem GTR zu lösen, gibst du die Funktionsgleichung von s in den `Y=`-Editor ein.
Gemäß dem Definitionsbereich empfiehlt es sich die Randbereiche in der `Window`-Einstellung für die x-Achse auf „Xmin=0“ und „Xmax=13“ festzulegen.
Zur Skalierung der y-Achse kannst du dich am gegebenen Koordinatensystem orientieren. Lege also „Ymin=-20“ und „Ymax=25“ fest.
Lasse dir nun den Graphen anzeigen.

Auf dem Display siehst du, dass der Graph zweimal die x-Achse schneidet. Beide Schnittstellen bestimmst du über diese Eingabenfolge im Graphs-Modus deines GTR:

`2nd → CALC → 2:zero`.

Der GTR liefert dir als gemeinsame Punkte des Graphen von s mit der x-Achse:
$N_1(0,5 \mid 0)$ und $N_2(8 \mid 0)$.

alternativ

Die Schnittpunkte des Graphen von s mit der x-Achse kannst du auch von Hand berechnen.

Setze dazu den Funktionsterm von s gleich Null und löse die resultierende Gleichung nach x auf:

$$\begin{aligned} 0 &= 34 - 4x - \frac{16}{x} && \mid \cdot x \\ 0 &= 34x - 4x^2 - 16 \\ 0 &= -4x^2 + 34x - 16 \end{aligned}$$

Beim Lösen dieser quadratischen Gleichung kannst du entweder die **abc-Formel** oder die **pq-Formel** verwenden.

►► Lösungsweg A: Lösen mit der *abc*-Formel

Die abc-Formel kannst du immer dann anwenden, wenn du eine quadratische Gleichung der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ vorliegen hast. Du kannst dann die abc-Formel in der Form

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

anwenden. Deine vorliegende Gleichung hat die Form $-4 \cdot x^2 + 34 \cdot x - 16 = 0$. Du kannst also deine Parameter aus der Gleichung entnehmen. Diese haben dann die Werte $a = -4$, $b = 34$ und $c = -16$.

Setze diese nun in die *abc*-Formel ein.

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\
&= \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-4)} \\
&= \frac{-34 \pm \sqrt{1156^2 - 256}}{-8} \\
&= \frac{-34 \pm \sqrt{900}}{-8} \\
x_1 &= \frac{-34 + 30}{-8} = \frac{-4}{-8} = 0,5 \\
x_2 &= \frac{-34 - 30}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8
\end{aligned}$$

▶▶ Lösungsweg B: Lösen mit der *pq*-Formel

Die *pq*-Formel kannst du immer dann anwenden, wenn du eine Gleichung in der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ vorliegen hast. Die gegebene Gleichung hat aber die Form $4x^2 + 34x - 16 = 0$. Teile folglich zunächst durch (-4), um den Faktor vor dem x^2 zu eliminieren.

$$\begin{aligned}
0 &= -4x^2 + 34x - 16 \qquad | : (-4) \\
0 &= x^2 - 8,5x + 4
\end{aligned}$$

Nun kannst du die *pq*-Formel anwenden mit

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Lies nun also noch die Parameter p und q aus der nun vorliegenden Gleichung aus. Diese ergeben sich mit $p = -8,5$ und $q = 4$. Setze diese in die *pq*-Formel ein und berechne $x_{1,2}$.

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{1,2} &= -\frac{(-8,5)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8,5}{2}\right)^2 - 4} \\
x_{1,2} &= 4,25 \pm \sqrt{\frac{72,25}{2} - \frac{16}{4}} \\
x_{1,2} &= 4,25 \pm \sqrt{\frac{56,25}{4}} \\
x_{1,2} &= 4,25 \pm \frac{7,5}{2} \\
x_1 &= 4,25 - 3,75 = \frac{1}{2} = 0,5 \\
x_2 &= 4,25 + 3,75 = \frac{16}{2} = 8
\end{aligned}$$

Bei $x_1 = 0,5$ und $x_2 = 8$ besitzt die Funktion s also Nullstellen. Die Schnittpunkte des Graphen von s mit der x-Achse lauten demnach:
$N_1(0,5 \mid 0)$ und $N_2(8 \mid 0)$
und liegen somit im gegebenen Definitionsbereich.

▶ Extrempunkte des Graphen von s bestimmen

Nun ist es deine Aufgabe, den Graphen von s im gegebenen Intervall auf Extrempunkte zu untersuchen. Damit an einer bestimmten betracheteten Stelle x_E eine Extremstelle vorliegt, müssen an dieser Stelle folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung. $f''(x_E) \neq 0$.

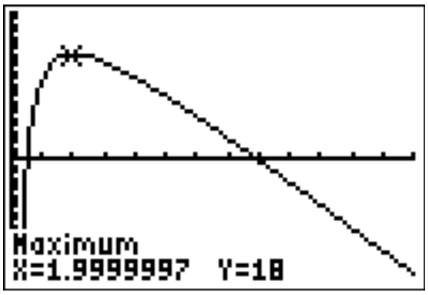
Aber die Koordianten der Extrempunkte des Graphen von s können auch im Graphs-Modus deines GTR bestimmt werden. Speichere dazu zunächst den Funktionsterm von s im `Y=`-Editor deines GTR und bestimme über bestimmte Eingabenfolgen die Koordinaten des gesuchten Extrempunkts. Da Funktion s nur auf einem beschränkten Intervall definiert ist, musst du diese noch auf Randextrema untersuchen. Setze dazu die jeweiligen Intervallsgrenzen in den Funktionsterm von s ein und untersuche so, ob Randextrema existieren.

1. Schritt: Untersuchen des Graphen von s auf Extrempunkte mit dem GTR:

Im Graphs-Modus deines GTR erkennst du neben den beiden Schnittpunkten des Graphen von s mit der x-Achse, dass der Graph von s außerdem einen Hochpunkt besitzen muss. Dessen Koordinaten berechnest du über diese Eingabenfolge:

`2nd → CALC → 4:maximum`

Der Hochpunkt H des Graphen von s besitzt die Koordinaten: $H(2 \mid 18)$.



2. Schritt: Untersuchen des Graphen von s auf Randextrema:

Da das Intervall auf welchem die Funktion s definiert ist, beschränkt ist, muss diese noch, wie oben bereits erwähnt, auf Randextrema untersucht werden.
Setze dazu die Grenzen des Definitionsbereichs von s $[0,5;12]$ in den Funktionsterm s ein.

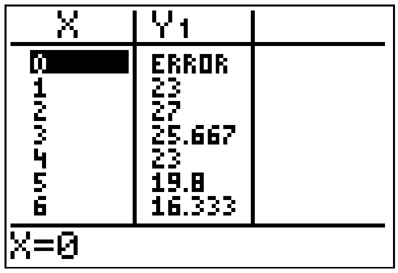
Für das linke Randextremum bei $x_1 = 0,5$ nimmt f den Funktionswert 0 an, da dieses gerade dem Schnittpunkt des Graphen von s mit der x-Achse bei $x_1 = 0,5$ entspricht. Das linke Randextremum besitzt also die Koordinaten: $N_1(0,5 \mid 0)$.

Für das rechte Randextremum bei $x_2 = 12$ erhältst du, durch Einsetzen in den Funktionsterm:

$$\begin{aligned} s(12) &= 34 - 4 \cdot 12 - \frac{16}{12} \\ &= 34 - 48 - \frac{4}{3} \\ &= -14 - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{46}{3} \end{aligned}$$

Das rechte Randextremum R besitzt also die Koordinaten $R\left(12 \mid -\frac{46}{3}\right)$.

▶ Graph der Funktion s skizzieren



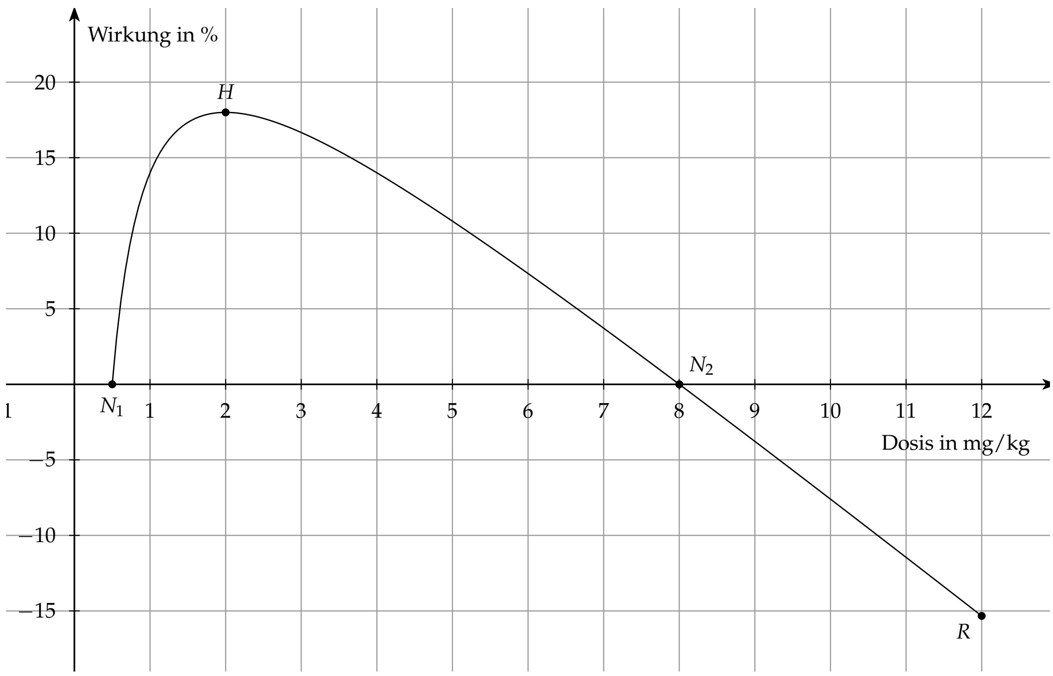
Hier ist es nun deine Aufgabe, den Graphen von s in das, in der Anlage befindlichen, Koordinatensystemen zu skizzieren. Beim Skizzieren des Graphen von s kann dir dein GTR behilflich sein. Hast du den Funktionsterm von s im `Y=`-Editor deines GTR gespeichert, so kannst du dir über folgende Eingabenfolge die zugehörige Wertetabelle anzeigen lassen:

`2nd → GRAPH (TABLE)`

Des Weiteren hast du die Koordinaten des Hochpunktes, der Schnittpunkte des Graphen von s mit der x-Achse und die Koordinaten der Randextrema berechnet. Diese können dir beim Skizzieren des Graphen von s in das gegebene Koordinatensystem ebenfalls behilflich sein.

Beachte, dass die Funktion nur für $0,5 \leq x \leq 12$ definiert ist, zeichne also nicht über diese Stellen hinaus.

Hast du den Graphen von s in das gegebene Koordinatensystem skizziert, so sollte dieser wie folgt aussehen:



▶ Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang interpretieren

Du kannst den Verlauf des Graphen interpretieren, indem du die Bedeutung der signifikanten Punkte beschreibst und außerdem den Verlauf der Kurve im Sachzusammenhang beschreibst. Beginne für kleine x-Werte im gegebenen Intervall und arbeite dich dann bis zum Punkt R vor.

Für $x = 0,5$ ergibt sich, dass f eine Nullstelle hat. Somit reicht eine tägliche Dosis von 0,5 mg pro kg Körpergewicht noch nicht aus um eine Wirkung nachzuweisen. Erst bei einer Steigerung der Dosis über 0,5 mg/kg tritt recht schnell eine Wirkung ein, was durch den starken Anstieg der Kurve dargestellt wird.

Bei einer Dosierung von 2 mg/kg erreicht die Kurve dann ihren Hochpunkt. Somit hat die Funktion an dieser Stelle ihren Maximalwert. Dieser Maximalwert beschreibt also die maximale Wirkung mit 18 %.

Für $x > 2$ fällt die Kurve dann ab. Also bewirkt eine Verabreichung von über 2 mg/kg eine Minderung der Wirkung. Dies geschieht zunächst nur leicht in der Nähe des Maximum, die Kurve fällt dann aber stärker, fast linear ab.

Bei einer Dosis von 8 mg/kg hat das Medikament keinen Nutzen mehr. Dies ist darin begründet, dass s hier eine Nullstelle aufweist und somit die Wirkung sich auf 0% reduziert.

Aufgrund des abfallenden Verlaufs des Graphen, nimmt s für $x > 8$ negative Werte an. Eine weitere Steigerung der Dosis hat also zur Folge, dass die Wirkung des Medikaments nicht mehr positiv sondern negativ ist. Somit kannst du dir überlegen, dass es also schädlich ist eine höhere Dosierung als 8 mg/kg zu sich zu nehmen.

b) **▶ Tägliche Dosis Lectozyn mit maximaler Wirkung bestimmen** (11P)

Es wird immer noch die Funktion s aus dem Teil a) betrachtet. Folglich kannst du Aussagen anhand der bereits berechneten Werte treffen.

Die Aufgabe fragt nun nach der Dosis mit maximaler Wirkung für einen Patienten mit einem Körpergewicht von 80 kg. In a) hast du bereits bestimmt, dass das Medikament am wirkungsvollsten ist bei einer Dosierung von 2 mg/kg. Somit kannst du die benötigte Dosierung bestimmen, indem du die Dosierung 2 mg/kg mit dem Körpergewicht des Patienten multiplizierst.

Dann erhältst du die beste Dosierung für den Patienten.

Berechne also die gesuchte Dosierung.

$$D_p = 2\,\text{mg/kg} \cdot 80\,\text{kg} = 160\,\text{mg}$$

Somit wäre die passende Dosierung für einen Patienten mit 80 kg Körpergewicht genau 160 mg Lectozyn.

▶ Wirkungssteigerung s für eine Person mit 80 kg Körpergewicht bestimmen, wenn...
... die vorgeschlagene Dosierung eingehalten wird

Hierzu musst du die Gesamtdosis von 150 mg (≙ 3 Tabletten à 50 mg), die laut Packungsbeilage von einer 80 kg schweren Person eingenommen werden sollen, auf die Dosis in mg pro kg Körpergewicht umrechnen:

$$\frac{150\,\text{mg}}{80\,\text{kg}} = 1{,}875\,\frac{\text{mg}}{\text{kg}}$$

Eine 80 kg schwere Person erhält bei Beachtung der Dosierung laut Packungsbeilage eine Dosis von 1,875 mg pro kg Körpergewicht.

Um die Wirkung der Tabletten zu bestimmen, setzt du die errechnete Dosis in den Funktionsterm s ein.

$$s(x) = 34 - 4x - \frac{16}{x}$$

$$s(1{,}875) = 34 - 4 \cdot 1{,}875 - \frac{16}{1{,}875} \approx 17{,}97$$

Die Wirkungssteigerung für eine 80-kg-Person beträgt bei 3 Tabletten à 50 mg Lectozyn ca. 17,97 % und liegt nur knapp unterhalb dem Maximalwert von 18 %.

Für alle weiteren Fälle gehst du ganz analog vor:
Zuerst errechnest du die tägliche Gesamtdosis, rechnest in die Dosis mg pro kg Körpergewicht um und setzt den so erhaltenen Wert in den Funktionsterm von s ein.

... eine Tablette mehr als vorgeschrieben eingenommen wird

Wird eine Tablette mehr eingenommen als vorgeschrieben sind das 4 Tabletten à 50 mg. Die Gesamtdosis beträgt demnach: $4 \cdot 50\,\text{mg} = 200\,\text{mg}$

Für eine 80-kg-Person errechnet sich die tägliche Dosis pro Körpergewicht nach:

$$\frac{200\,\text{mg}}{80\,\text{kg}} = 2,5\,\frac{\text{mg}}{\text{kg}}$$

Einsetzen in den Funktionsterm s ergibt:

$$s(x) = 34 - 4x - \frac{16}{x}$$
$$s(2,5) = 34 - 4 \cdot 2,5 - \frac{16}{2,5} = 17,60$$

Die Wirkungssteigerung für 4 Tabletten beträgt 17,6 %.

... eine Tablette weniger als vorgeschrieben eingenommen wird

Wird eine Tablette weniger eingenommen als vorgeschrieben sind das 2 Tabletten à 50 mg. Die Gesamtdosis beträgt demnach: $2 \cdot 50\,\text{mg} = 100\,\text{mg}$

Für eine 80-kg-Person errechnet sich die tägliche Dosis pro Körpergewicht nach:

$$\frac{100\,\text{mg}}{80\,\text{kg}} = 1,25\,\frac{\text{mg}}{\text{kg}}$$

Einsetzen in den Funktionsterm s ergibt:

$$s(x) = 34 - 4x - \frac{16}{x}$$
$$s(1,25) = 34 - 4 \cdot 1,25 - \frac{16}{1,25} = 16,2$$

Die Wirkungssteigerung für 2 Tabletten beträgt 16,2 %.

► Beurteilen, ob der Dosierungsvorschlag geeignet erscheint

Um den Dosierungsvorschlag zu beurteilen, gehe auf die maximale Wirkung ein und untersuche, wie nah die Wirkung mit den vorgeschlagenen Dosierungen an diesem maximalen Wert liegt. Besteht nur eine kleine Differenz zwischen dem maximalen Wert und der Wirkung, die erzielt wird, so sind die Angaben gut. Andernfalls kannst du den Dosierungsvorschlag als nicht geeignet einstufen.

Der Dosierungsvorschlag für eine Person mit 80 kg Körpergewicht erweist sich als geeignet, da bei einer Tablettengabe von 3 Stück à 50 mg die Wirkung ($\approx 17,97\,\%$) nahezu dem Maximum ($= 18\,\%$) entspricht.
Wird die Dosierung nicht genau eingehalten (+/- 1 Tablette), so macht dies nicht viel aus, da die Wirkung immernoch bei über 16 % liegt – nicht weit vom Maximalwert entfernt.
Grund hierfür ist die Tatsache, dass der Graph im Bereich des Maximums eine geringe Steigung bzw. ein geringes Gefälle aufweist bzw. die Kurve dort flach verläuft: Eine Änderung in x (der Dosis) hat keine wesentliche Änderung im Funktionswert $s(x)$ (der Wirkung) zur Folge.

c) ▶ **Zeigen, dass t_2 die Taylorfunktion 2. Grades zur Funktion s bei $x = 2$ ist** (12P)

Zusätzlich zur Funktion s mit

$$s(x) = 34 - 4x - \frac{16}{x}.$$

ist gegeben die Taylorfunktion 2. Grades mit

$$t_2(x) = -2x^2 + 8x + 10.$$

Um zu zeigen, dass t_2 eine Taylorfunktion von Funktion s an der Stelle $x = 2$ ist, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Die Funktionswerte an der Stelle $x = 2$ müssen für beide Funktionen übereinstimmen: $t_2(2) = s(2)$
- Die Funktionswerte der ersten Ableitungen müssen an der Stelle $x = 2$ übereinstimmen: $t_2'(2) = s'(2)$
- Die Funktionswerte der zweiten Ableitungen müssen an der Stelle $x = 2$ übereinstimmen: $t_2''(2) = s''(2)$

1. Schritt: Prüfen, ob $t_2(2) = s(2)$

Berechne also die Funktionswerte von t_2 und s an der Stelle $x = 2$. Stimmen diese überein, so gilt $t_2(2) = s(2)$ und somit ist die Bedingung erfüllt.

$$\begin{aligned} s(x) &= 34 - 4x - \frac{16}{x} \\ s(2) &= 34 - 4 \cdot 2 - \frac{16}{2} \\ &= 34 - 8 - 8 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2(x) &= -2x^2 + 8x + 10 \\ t_2(2) &= -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 10 \\ &= -8 + 16 + 10 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Beide Funktionswerte an der Stelle $x = 2$ stimmen überein. Die Bedingung $t_2(2) = s(2)$ ist erfüllt.

2. Schritt: Prüfen, ob $t_2'(2) = s'(2)$

Zuerst ermittelst du die ersten Ableitungen der Funktion s und der Funktion t_2. Setze dann $x = 2$ und berechne $t_2'(2)$ und $s'(2)$. Gilt $t_2'(2) = s'(2)$, dann ist die Bedingung erfüllt.

$$s'(x) = -4 + \frac{16}{x^2} \qquad \text{(siehe Teilaufgabe a)}$$

$$\begin{aligned} s'(2) &= -4 + \frac{16}{2^2} \\ &= -4 + \frac{16}{4} \\ &= -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

$t_2(x) = -2x^2 + 8x + 10$
$t_2'(x) = -4x + 8$
$t_2(2) = -4 \cdot 2 + 8 = 0$

Die Funktionswerte der beiden ersten Ableitungen stimmen an der Stelle $x = 2$ überein. Die Bedingung $t_2'(2) = s'(2)$ ist somit erfüllt.

3. Schritt: Prüfen, ob $t_2''(2) = s''(2)$

Nun ermittelst du die zweiten Ableitungen von Funktion s und von Funktion t_2 und setzt dann $x = 2$. Berechne $t_2''(2)$ und $s''(2)$. Gilt $t_2''(2) = s''(2)$, so ist die Bedingung erfüllt.

$s''(x) = \dfrac{-32}{x^3}$ (siehe Teilaufgabe a)

$s''(2) = \dfrac{-32}{2^3}$

$= \dfrac{-32}{8} = -4$

$t_2'(x) = -4x + 8$
$t_2''(x) = -4$
$t_2''(2) = -4$

Auch die Funktionswerte beider zweiter Ableitungen stimmen an der Stelle $x = 2$ überein. Die Bedingung $t_2''(2) = s''(2)$ ist erfüllt.

$\Rightarrow$ Alle Bedingungen sind erfüllt: t_2 ist die Taylorfunktion 2. Grades zur Funktion s an der Stelle $x = 2$.

▶ Algebraisch den Inhalt der Fläche zwischen $1 \leq x \leq 3$ berechnen (12BE)

Um den Flächeninhalt algebraisch zu bestimmen, der von der Funktion $t_2(x)$ und der x-Achse im Bereich $1 \leq x \leq 3$ eingeschlossen wird, berechnest du das Integral in den gegebenen Grenzen, da dieses auch als Flächeninhalt unter der Kurve interpretiert werden kann.
Setze also die Integrationsgrenzen, die du gegeben hast, ein und berechne das Integral der Form

$$A = \int_1^3 t_2(x)\mathrm{d}x$$

Die Funktion t_2 lautet:

$t_2(x) = -2x^2 + 8x + 10$

Die Berechnung des Integrals ergibt:

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^3 (-2x^2+8x+10)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2+10x\right]_1^3 \\
&= \left(-\frac{2}{3}\cdot 3^3+4\cdot 3^2+10\cdot 3\right)-\left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3+4\cdot 1^2+10\cdot 1\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}\cdot 27+4\cdot 9+10\cdot 3\right)-\left(-\frac{2}{3}+4+10\right) \\
&= -\frac{2}{3}\cdot 27+4\cdot 9+10\cdot 3+\frac{2}{3}-4-10 \\
&= -18+36+30+\frac{2}{3}-4-10 \\
&= 34+\frac{2}{3}=\frac{104}{3}
\end{aligned}$$

Da du das Integral auch als Fläche unter der Kurve interpretieren kannst, ergibt sich der Flächeninhalt A mit $\frac{104}{3}$ Flächeneinheiten.

d) ▶ **Zeigen, dass $s_k'(x) = -4+\frac{k^2}{x^2}$** (11P)

Gegeben ist die Funktionsschar s_k mit

$$s_k(x) = 34-4x-\frac{k^2}{x^2}$$

Um zu zeigen, dass $s_k'(x) = -4+\frac{k^2}{x^2}$ kannst du die Funktion s_k allgemein ableiten.

Dabei wird k wie eine konstante Zahl behandelt.

$$\begin{aligned}
s_k(x) &= 34-4x-\frac{k^2}{x} \\
&= 34-4x-k^2\cdot\frac{1}{x} && \text{da: } \frac{1}{x}=x^{-1} \\
&= 34-4x-k^2\cdot x^{-1} \\
s_k'(x) &= 0-4-k^2\cdot(-1)\cdot x^{-2} \\
&= -4+k^2\cdot x^{-2} && \text{da: } x^{-2}=\frac{1}{x^2} \\
&= -4+k^2\cdot\frac{1}{x^2} \\
&= -4+\frac{k^2}{x^2}
\end{aligned}$$

Die Ableitung von s_k ergibt sich also nach Berechnung mit $s_k' = -4+\frac{k^2}{x^2}$.

▶ **Nachweisen, dass jede Kurve der Schar zwei Punkte mit waagerechter Tangente hat**

Ein Punkt auf einer Kurve hat dann einen waagerechte Tangente, wenn die erste Ableitung gleich Null ist. Dies kommt in Extrempunkten oder Sattelpunkten vor.
Es gilt also hier nachzuweisen, dass die Funktionsschar s_k zwei solcher Stellen hat hat.

Für eine waagerechte Tangente muss also folgende Bedingung erfüllt sein:

- Die erste Ableitung der betrachteten Funktion s_k muss an der Stelle des Extrempunktes eine Nullstelle besitzen $\Longrightarrow$ $s'_k(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
s'_k(x) &= -4x + \frac{k^2}{x^2} \\
0 &= -4 + \frac{k^2}{x^2} && \mid +4 \\
4 &= \frac{k^2}{x^2} && \mid \cdot x^2 \\
4 \cdot x^2 &= k^2 && \mid :4 \\
x^2 &= \frac{k^2}{4} && \mid \sqrt{} \\
x &= \pm\frac{\sqrt{k^2}}{2} \\
x_1 &= \frac{k}{2} \\
x_2 &= -\frac{k}{2}
\end{aligned}
$$

Man erhält als Stellen $x_1 = \frac{k}{2}$ und $x_2 = -\frac{k}{2}$. Diese können jedoch gleich sein, abhängig davon, welche k angenommen werden. Prüfe also noch die Gleichung $x_1 = x_2$, für welche k diese erfüllt wird.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2 \\
\frac{k}{2} &= -\frac{k}{2} && \mid \cdot 2 \\
k &= -k && \mid +k \\
2k &= 0 && \mid :2 \\
k &= 0
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Gleichheit von x_1 und x_2 genau dann, wenn $k = 0$ ist. Die Aufgabe gibt aber vor, dass $k > 0$ gilt. Folglich gilt $x_1 \neq x_2$, sodass die Behauptung, dass jede Kurve der Schar zwei Punkte mit waagerechter Tangente hat, bewiesen wäre.

► **Untersuchen, ob Aussage wahr ist**

Verbindest du beide Extrempunkte miteinander, erhältst du eine Strecke $\overline{E_1E_2}$ mit einem Mittelpunkt M.

Es geht nun darum zu untersuchen, ob der Mittelpunkt M beider miteinander verbundener Extrempunkte immer die selben Koordinaten hat. Dies ist dann der Falls, wenn M unabhängig von k ist.

Der Mittelpunkt einer Strecke ist das arithmetische Mittel ($\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$) der Koordinaten der Endpunkte.

Hast du die Endpunkte E_1 und E_2 gegeben, ist die x-Koordinate des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{E_1E_2}$ das arithmetische Mittel der x-Koordinaten von E_1 und E_2; gleiches gilt analog für die y-Koordinate von M.

Mit $E_1\left(\dfrac{k}{2}\mid 34-4k\right)$ und $E_2\left(-\dfrac{k}{2}\mid 34+4k\right)$:

$$M\left(\frac{(\frac{k}{2})+(-\frac{k}{2})}{2}\mid\frac{(34-4k)+(34+4k)}{2}\right)=M\left(\frac{0}{2}\mid\frac{68}{2}\right)=M(0\mid 34).$$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{E_1E_2}$ ist also $M(0\mid 34)$ und seine Koordinaten sind unabhängig von k.

Die Aussage, die du zeigen solltest, ist folglich wahr: Der Mittelpunkt ist für jeden Wert von k ($k>0$) derselbe.