a) (1) ▶ **Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von f_a** (17P)

Gesucht sind die Nullstellen, sowie die Hoch- und Wendepunkte von f_a in Abhängigkeit von a. Diese drei Arten von Punkten lassen sich jeweils auf verschiedene Weise bestimmen:

Nullstellen sind Schnittstellen mit der x-Achse, ihre y-Koordinaten sind daher gleich Null. Für f_a gilt demnach:

$f_a(x) = 0.$

Extrempunkte sind Punkte, in denen der Funktionswert ein relatives Extremum annimmt. In einem solchen Punkt ist die Steigung der Funktion gleich Null. Die Steigung von f_a wird durch seine erste Ableitung dargestellt.
Die notwendige Bedingung für Extrempunkte lautet daher:

$f'_a(x) = 0.$

An Hoch- und Tiefpunkten wechselt die Steigung zudem von positiv nach negativ beziehungsweise von negativ nach positiv. Die Änderungsrate der Steigung in einem Extrempunkt ist daher negativ oder positiv - aber nie Null. Die Änderungsrate ist durch die zweite Ableitung von f_a gegeben.
Für die hinreichende Bedingung für Extrempunkte folgt daraus:

$f''_a(x) \neq 0.$

Wendepunkte sind Extrempunkte der Steigung, also von f'_a. In einem Extremum von f'_a ist die Steigung der Funktion gleich Null. Die Steigung von f'_a wird wiederum durch die Ableitung f''_A der Funktion f'_a gegeben. Diese wird im einem Extremum Null.
Es folgt daraus die notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$f''_a(x) = 0$

An Hoch- und Tiefpunkten wechselt die Steigung zudem von positiv nach negativ beziehungsweise von negativ nach positiv. Die Änderungsrate der Steigung in einem Extrempunkt ist daher negativ oder positiv - aber nie Null. Die Änderungsrate ist durch die zweite Ableitung von f'_a gegeben - also f'''_a.
Es folgt daraus die hinreichende Bedingung für Wendepunkte:

$f'''_a \neq 0$

Berechne nun nacheinander die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte in Abhängigkeit von a.

(2) ▶ **Nachweis, dass T_a ein globaler Tiefpunkt ist**

Wir wissen bereits aus der vorhergehenden Aufgabe, dass T_a ein Extrempunkt ist, da er die gleichen Koordinaten besitzt wie E. Nun soll nachgewiesen werden, dass dieser Punkt auch ein globaler Tiefpunkt von f_a ist.

In einem Tiefpunkt wechselt die Steigung der Funktion von negativ nach positiv. Die Änderungsrate der Steigung ist im Tiefpunkt daher positiv. Diese Änderungsrate ist durch die zweite Ableitung von f_a gegeben. Um zu zeigen, dass T_a auch ein Tiefpunkt ist, muss also die hinreichende Bedingung für Tiefpunkte an dieser Stelle

(1) $f_a''\left(-\frac{1}{a}\right) > 0$

gelten.

Gilt diese Bedingung, muss jedoch noch nachgewiesen werden, dass dieser Tiefpunkt global und nicht relativ ist. Da der Tiefpunkt, wie zuvor nachgewiesen, der einzige Extrempunkt ist, muss für alle x kleiner x_1 die Steigung negativ sein und für alle x größer x_1 positiv.

Die Aussage

(2) $f_a'(x) > 0$

muss daher für alle $x > -\frac{1}{a}$ gelten und die Aussage

(3) $f_a'(x) < 0$

muss für alle $x < -\frac{1}{a}$ gelten.

Prüfe nun die drei Bedingungen durch Einsetzen der entsprechenden Funktionsgleichungen und Funktionswerte von f_a.

b) (1) ▶ **Nachweis der Längenformel** (9P)

Die gegebene Formel für die Länge der Strecke $\overline{T_aW_a}$ soll nachgewiesen werden. Da die Länge $l(a)$ im Quadrat angegeben ist, vermuten wir, dass die Länge mit der Satz des Pythagoras bestimmt wurde.

Die Länge einer Strecke berechnest du mit dem Satz des Pythagoras auf folgende Weise:

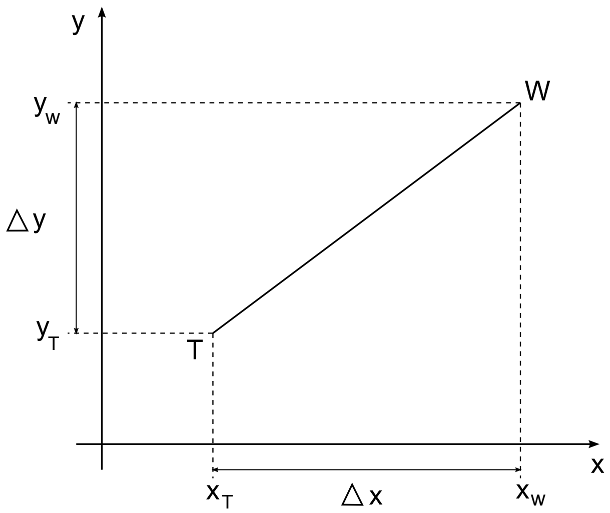
Allgemein lautet der Satz des Pythagoras:

Hypontenuse^2 = Kathete$_1^2$ + Kathete$_2^2$.

Dabei stellt die Länge $l(a)$ der Strecke die Hypotenuse dar und die Projektionen dieser Strecke auf die x- und y-Achse die jeweiligen Katheten.

Die Längen der Katheten entsprechen demnach den Differenzen der x- und y-Koordinaten der Endpunkte T_a und W_a der gesuchten Strecke.

Für die Länge der Strecke folgt daraus:



$l(a) = (x_w - x_t)^2 + (y_w - y_t)^2.$

Setze nun die Koordinaten von W_a und T_a in die Formel ein und vereinfache mit Blick auf das zu erwartende Ergebnis.

(2) ► **Untersuchung, ob $l(a)$ extremal werden kann**

Es soll geprüft werden, ob l beziehungsweise l^2 extremal - also minimal oder maximal werden kann. Wenn dies der Fall ist, müssen Extrempunkte der Funktion l^2 in Abhängigkeit von a existieren.

Extrempunkte sind Punkte, in denen der Funktionswert ein relatives Extremum annimmt. In einem solchen Punkt ist die Steigung der Funktion gleich Null. Die Steigung von l^2 wird durch seine erste Ableitung dargestellt.
Die notwendige Bedingung für Extrempunkte lautet daher:

$$(l'(a))^2 = 0.$$

Prüfe, ob sich durch Lösen dieser Gleichung mögliche Extremstellen a ergeben.

c) (1) ► **Nachweis, dass F_a eine Stammfunktion von f_a ist** (14P)

Es soll mithilfe eines Integrationsverfahrens gezeigt werden, dass F_a eine Stammfunktion von f_a ist. Eine Stammfunktion von f_a hat allgemein die Gleichung:

$$F_a = \int f_a(x)\ \mathrm{d}x + C$$

Bilde dazu mithilfe der partiellen Integration das Integral von f_a. Die allgemeine Formel der partiellen Integration einer Funktion, die aus dem Produkt zweier Funktionen u' und v zusammengesetzt ist, lautet:

$$\int \left(u'(x) \cdot v(x)\right)\ \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int \left(u(x) \cdot v'(x)\right)\ \mathrm{d}x.$$

$u'(x)$ sei in unserem Fall definiert als:

$$u'(x) = \mathrm{e}^{ax}.$$

Für $u(x)$ folgt daraus:

$$u(x) = \int \left(\mathrm{e}^{ax}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{ax}.$$

$v(x)$ sei definiert als:

$$v(x) = \frac{x}{a}.$$

Für $v'(x)$ folgt daraus:

$$v'(x) = \frac{1}{a}.$$

Setze die Funktionsgleichung in die Formel für die partielle Integration ein und vereinfache mit Blick auf F_a.

(2) ► **Nachweis des Flächeninhalts der eingeschlossenen Fläche**

Es soll gezeigt werden, dass der Flächeninhalt der unbegrenzten Fläche, die die Kurve von f_a mit der x-Achse im III. Quadranten einschließt, den Inhalt

$$I_a = \frac{1}{a^3}$$

besitzt.

Die Fläche unter oder über einer einer Kurve kann durch den Betrag des Integrals der zugehörigen Funktion über das Intervall bestimmt werden, innerhalb dessen die Fläche begrenzt ist.
Da sich die gesuchte Fläche im III. Quadranten befindet, liegt die obere Grenze des Intervalls bei

$x_1 = 0$

und die obere Grenze im negativen Unendlichen, also bei

$x_0 = \lim\limits_{x \to -\infty}$.

Wenn eine Grenze im Unendlichen liegt, so handelt es sich um ein uneigentliches Integral.

Für die Fläche unter der Kurve folgt aus den Angaben:

$$A = \int_{\lim\limits_{x \to -\infty}}^{0} |f_a(x)| \, \mathrm{d}x$$

Setze die Funktionsgleichung von f_a in die Flächenformel ein und bestimme A. Vergleiche anschließend mit I_a.

d) (1) ► **Nachweis der Monotonie** (10P)

Es soll gezeigt werden, dass h im Intervall $]0; \infty[$ streng monoton wächst.
Streng monotones Wachstum setzt voraus, dass die Steigung der Funktion im gesamten Intervall größer Null ist. Die Steigung einer Funktion ist durch ihre erste Ableitung dargestellt. Für h' gilt damit:

$h'(x) > 0$ im Intervall $]0; \infty[$.

Bestimme die erste Ableitung von h und löse die Ungleichung nach x auf. Prüfe, ob die Bedingung im gegebenen Intervall erfüllt ist.

► **Nachweis, dass $h(x)$ für alle $x \geq 0$ größer oder gleich 1 ist.**

Es soll gezeigt werden, dass die Ungleichung

$h(x) \geq 1$

für alle $x \geq 0$ gilt.
Wir haben bereits gezeigt, dass die Funktion h für alle $x > 0$ wächst. Wenn also bei $x = 0$ die Funktion einen Wert gleich oder größer 1 annimmt, so ist die Ungleichung erfüllt.

(2) ► **Nachweis, dass die Parabel p den Graphen von f_a nur im Ursprung schneidet**

Es soll gezeigt werden, dass die Normalparabel p den Graphen von f_a nur im Ursprung schneidet.
An Schnittstelle von Graphen besitzen die zugehörigen Funktionen den gleichen Funktionswert. Es gilt daher:

$p(x) = f_a(x)$.

Da die Graphen sich nur im Ursprung schneiden, muss nun durch Auflösen nach x und Umformung gezeigt werden, dass es nur eine Schnittstelle gibt - und zwar bei $x = 0$.

Der Hinweise auf die Untersuchung von h im Aufgabenteil d)(1) spielen im Verlauf der Rechnung eine Rolle. Bekannt ist, dass die Funktion h mit der Gleichung

$h(x) = \mathrm{e}^x - x$

für alle $x > 0$ streng monoton wächst und für alle $x \geq 0$ größer oder gleich 1 ist.

Setze die Funktionsgleichungen von p und f in die Gleichung ein und löse mit dem Satz vom Nullprodukt nach x auf:

$$\begin{array}{lr} & p(x) = f_a(x) \\ & (\ldots) = \\ (1) & \boldsymbol{x_1 = 0} \\ (2) & \mathrm{e}^{ax} - ax = 0 \end{array}$$

Es gibt also ein Schnittstelle bei $x_1 = 0$. Die Koordinaten dieses Punktes sind folglich $S(0\,|\,0)$. Es existiert also ein Schnittpunkt im Ursprung. Es fällt auf, dass der linke Term von Gleichung (2) dem Funktionsterm von h ähnelt. Genauer gesagt, handelt es sich hierbei um $h(ax)$:

$h(ax) = \mathrm{e}^{ax} - ax.$