1.1 ▶ Zeigen, dass A, B und C die Ebene E aufspannen (5P)

Allgemein spannen drei unterschiedliche Punkte A, B und C immer genau dann eine Ebene E auf, wenn sie nicht alle auf derselben Geraden liegen. Spannen die drei Punkte eine Ebene E auf, so liegen sie in dieser Ebene.

Nun sollst du prüfen, ob die drei gegebenen Punkte A, B und C die Ebene E aufspannen. Nach der obigen Aussage musst du dafür prüfen, ob die Punkte alle in der Ebene E liegen und ob sie auf einer gemeinsamen Gerade liegen.

Betrachte dafür einen der drei Punkte, bspw. den Punkt A, als Stützpunkt der Geraden durch A und B bzw. durch A und C .

Damit alle Punkte A, B und C auf derselben Geraden liegen, müssen die Geraden durch A und B bzw. durch A und C identisch sein.

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt A auf beiden Geraden liegt und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ Vielfache voneinander sind. Da wir den Punkt A als Stützpunkt der Geraden durch A und B bzw. durch A und C betrachten, liegt dieser auf beiden Geraden und du musst nur noch prüfen, ob gilt:

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$$

Es ergeben sich folgende Bedingungen an A, B und C, damit sie die Ebene E aufspannen:

- A, B und C liegen in E
- A, B und C liegen nicht auf der selben Geraden

Überprüfe also zunächst, ob die Punkte in der Ebene E liegen und dann, ob sie auf einer Geraden liegen oder nicht.

1.2 ▶ Zeigen, dass g in E liegt (5P)

In dieser Aufgabe sollst du nun prüfen, ob g in der Ebene E liegt. Liegt eine Gerade in einer Ebene E, so liegt insbesondere auch jeder Punkt, der auf der Geraden g liegt, in der Ebene E.

Jeder Punkt, der auf g liegt, lässt sich durch die Parametergleichung der Ebene beschreiben. Forme zunächst die Parametergleichung von g in einen Vektor um und setze dann die Koordinaten dieses Vektors in die Koordinatengleichung von E ein. Resultiert daraus eine wahre Aussage unabhängig vom Parameter r, so liegt g in E.

Gehe also wie folgt vor:

1. Parametergleichung von g in Vektorform umformen
2. Koordinaten in Ebenengleichung einsetzen und auf wahre Aussage prüfen

Formuliere also zunächst die Parametergleichung von E in einen Vektor um und prüfe dann die Bedingung.

▶ Dreieck in Koordinatensystem einzeichnen

Nun sollst du das durch die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen bestimmte Dreieck, das von der Aufgabe als Spurdreieck bezeichnet wird, in das Material einzeichnen.

Die Bezeichnung als Spurdreieck deutet schon darauf hin, durch welche Punkte dieses Dreieck aufgespannt werden soll. Dieses Dreieck soll nämlich durch die Spurpunkte von E aufgespannt werden. Die Spurpunkte von E sind gerade die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen.

Die Koordinaten der Spurpunkte sind immer gegeben über $S_x(x \mid 0 \mid 0)$ als Schnittpunkt von E mit der x-Achse, $S_y(0 \mid y \mid 0)$ als Schnittpunkt von E mit der y-Achse und $S_z(0 \mid 0 \mid z)$ als Schnittpunkt von E mit der z-Achse.

Um diese für eine Ebene E zu bestimmen, setze die Koordinaten der allgemeinen Spurpunkte in die Koordinatengleichung ein und löst nach der gesuchten Koordinate auf.

► Gerade g in das Koordinatensystem einzeichnen

Eine Gerade wird immer durch zwei nicht identische Punkte eindeutig definiert. Hast du also zwei Punkte, die auf der Geraden g liegen, so kannst du diese eindeutig in ein Koordinatensystem einzeichnen.

Einen Punkt erhältst du über den Stützvektor der gegebenen Geraden. Einen zweiten Punkt kannst du berechnen, indem du für den Parameter t einen beliebigen Wert einsetzt. Um dir die Arbeit zu erleichtern, solltest du den Parameter aber so wählen, dass sich Brüche kürzen bzw. du keinen großen Rechenaufwand hast.

1.3 **► Koordinatengleichung von F bestimmen** (4P)

Du sollst nun eine Ebene F so bestimmen, dass sie senkrecht auf der x-y-Ebene steht und Gerade g enthält.

Allgemein stehen zwei Ebenen E und F senkrecht aufeinander, wenn der Normalenvektor von E einer der beiden Spannvektoren von F ist.

Eine Ebene kann immer eindeutig durch eine Gerade und einem vom Richtungsvektor der Gerade verschiedenen Richtungsvektor aufgespannt werden.

Aus diesen Vorgaben kannst du zunächst eine Parametergleichung von F aufstellen. Dazu benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{xy}}$ der x-y-Ebene sowie die Geradengleichung von g, die die Form

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{v}$$

hat. Die Parametergleichung von F baut sich dann auf mit:

$$F: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{v} + s \cdot \overrightarrow{n_{xy}}$$

Der Normalenvektor der x-y-Ebene zeigt in Richtung der z-Achse. Dieser kann also wie folgt angegeben werden:

$$\overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ von F erhältst du dann über das Vektorprodukt von $\overrightarrow{n_{xy}}$ mit dem Richtungsvektor der Gerade g.

Allgemein hat eine Koordinatengleichung dann die Form

$$F: m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = d,$$

wobei m_1, m_2 und m_3 die Einträge von $\overrightarrow{n_F}$ sind. d erhältst du über einen Punkt der in F liegt mittels Punktprobe. Verwende dafür den Stützpunkt der Geraden g, da dieser Punkt durch die Konstruktion von F in F liegt, weil die ganze Gerade in F verlaufen soll.

Gehe also so vor:

1. Normalenvektor von F aufstellen
2. Koordinatengleichung von F berechnen.

2.1 ▶ Lineares Gleichungssystem bestimmen (4P)

Du sollst nun ein lineares Gleichungssystem bestimmen, das zur Berechnung des Preises des Weiß-, Rot- bzw. Roséweins dient. Verwende dafür die Angaben, die du aus den Preisen und der Zusammensetzung der beiden Geschenksortimente erhältst.

Die Aufgabe gibt dir vor, dass es zwei Geschenksortimente A und B gibt, die sich zu verschiedenen Teilen aus Weiß-, Rot- und Roséwein zusammensetzen. Außerdem haben beide Sortimente verschiedene Preise.

2.2 ▶ Preislisten angeben (2P)

Nun sollst mittels der Lösung, die dir von der Aufgabe gegeben wird, zwei Preislisten erstellen. Du kannst erkennen, dass der Roséwein einen Fixpreis besitzt.

Folglich kann eine Variation in der Preisliste nur durch verschiedene Preise des Rot- und Weißweins verursacht werden. Eine Flasche Rotwein hat nach der Aufgabenstellung den Preis t und eine Flasche Weißwein kostet $(11 - t)$ €. Dabei soll für t gelten:

$0 \leq t \leq 11$

Du kannst nun zwei Preislisten angeben, indem du ein t wählst, dass diese Bedingung erfüllt. Damit hast du dann den Preis des Rotweins festgelegt, der dann den Preis des Weißweins eindeutig bestimmt.

2.3 ▶ Preis der einzelnen Flaschen bestimmen (4P)

Nun wird das Sortiment um ein weiteres Sortiment C erweitert. Daraus erhältst du eine weitere Gleichung, sodass du drei Gleichungen und drei Variablen gegeben hast. Folglich kannst du die Variablen eindeutig bestimmen.

Das Sortiment C soll 6 Flaschen Weiß-, 4 Flaschen Rot- und 2 Flaschen Roséwein enthalten und kostet 57 €.

Allerdings werden nur 5 Flaschen Weißwein abgerechnet. Folglich ist die 6. Flasche für die Betrachtung unwichtig, da du den Preis der Flaschen feststellen willst und diese Flasche keinen Preis besitzt.

Daraus ergibt sich die folgende 3. Gleichung:

$5 \cdot w + 4 \cdot r + 2 \cdot s = 57$

Setze diese Gleichung nun mit dem LGS aus 2.1 zusammen. Löse dieses Gleichungssystem um die gesuchten Werte für s, w und r zu erhalten.

2.4 ▶ Zusammenhang zwischen den Gleichungen, Preislisten, Ebenen und Geraden erläutern (4P)

Um den Zusammenhang der Gleichungen, Preislisten, Ebenen und Geraden zu erläutern, musst du zunächst die Gemeinsamkeiten finden. Achte dabei zunächst auf ähnliche Terme und Formulierungen.
Im zweiten Schritt musst du diese dann erklären und in den Kontext der Aufgabe einordnen. Auf diese Weise kannst du geometrische Objekte beispielsweise als Lösungen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen ansehen.

Betrachte zunächst die einzelnen Gleichungen sowie die geometrischen Objekte.

Gerade g: $\quad g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebene E: $\quad E: x + y + z = 15$

Ebene F: $\quad F: x + y = 11$

Gleichungssystem G:
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & w + r + s & = & 15 \\ \text{II} & w + r & = & 11 \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems G: $\quad w = 11 - t, r = t, s = 4$

2.5 ▶ Auswirkungen der dritten Gleichung erläutern (2P)

In Aufgabe 2.3 gibt dir die Aufgabe eine weitere Gleichung vor. Mittels dieser konntest du das Gleichungssystem eindeutig lösen, mit der Lösung:

$s = 4, w = 5$ und $r = 6$

Im Aufgabenteil zuvor hast du die Gleichungen und Ebenen der vorangegangenen Aufgabenteile in Beziehung gesetzt, sodass du zu dem Ergebnis gelangt bist, dass die Ebenen als Lösungen der einzelnen Gleichungen interpretiert werden können. Die Schnittgerade beschrieb dann die Lösungsmenge beider Gleichungen.
Fasse also die 3. Gleichung auch als Ebene auf und interpretiere die eindeutige Lösung.