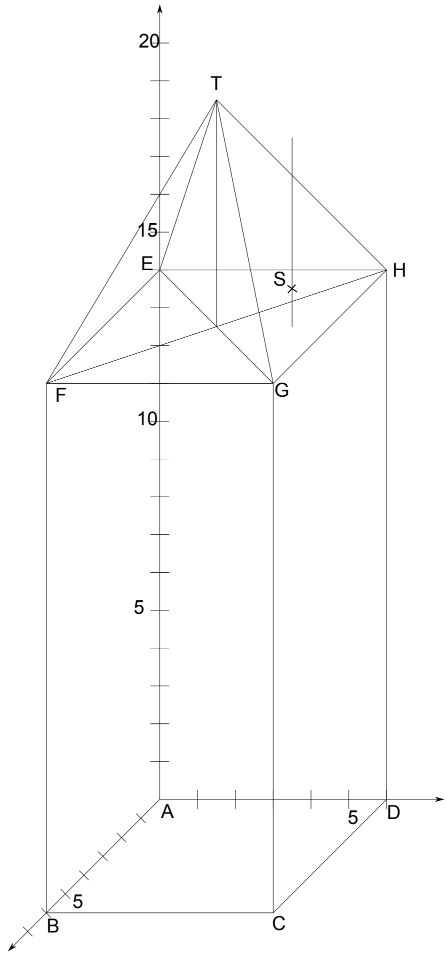
1. ▶ **Trafohäuschen zeichnen** (4BE)

Die Säule ist laut Aufgabentext 14 m hoch; die Spitze der aufgesetzten Pyramide befindet sich wiederum 6 m senkrecht über dem Mittelpunkt der Deckfläche der Säule.



▶ **Koordinaten der Eckpunkte angeben**

E, F, G und H liegen je 14 LE senkrecht über den Punkten A, B, C und D und haben somit die Koordinaten: $E\,(0\mid 0\mid 14)$, $F\,(6\mid 0\mid 14)$, $G\,(6\mid 6\mid 14)$, $H\,(0\mid 6\mid 14)$.

Der Punkt T liegt 6 LE senkrecht über dem Mittelpunkt der Deckfläche $EFGH$. Dieser Mittelpunkt M hat die Koordinaten $M\,(3\mid 3\mid 14)$. Für die Koordinaten von T gilt folglich $T\,(3\mid 3\mid 20)$.

2. ▶ **Größe des Winkels berechnen** (8BE)

Da die Pyramide **gerade** ist, schneiden sich alle benachbarten Dreiecksflächen unter dem gleichen Winkel. Wir wählen uns deshalb exemplarisch ein Paar aus, nämlich die Dreiecke FGT und GHT.
Der Winkel zwischen den Dreiecksseiten entspricht dem Winkel der **Ebenen**, in denen diese Dreiecke liegen. Dieser wiederum ist genau der Winkel zwischen den **Normalenvektoren** dieser beiden Ebenen.

1. Schritt: Ebenengleichungen ermitteln

Bestimme zunächst je eine Ebenengleichung in **Parameterform**. Wir wählen jeweils den Ortsvektor $\overrightarrow{OT}$ als Stützvektor beider Ebenen.

$$E_{FGT}:\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OT} + r\cdot\overrightarrow{TF} + s\cdot\overrightarrow{TG} = \begin{pmatrix}3\\3\\20\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}$$

$$E_{GHT}:\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OT} + k\cdot\overrightarrow{TG} + l\cdot\overrightarrow{TH} = \begin{pmatrix}3\\3\\20\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix}$$

Über das **Kreuzprodukt** lässt sich jeweils der Normalenvektor der Ebenen berechnen.

$$\overrightarrow{n}_{FGT} = \overrightarrow{TF}\times\overrightarrow{TG} = \begin{pmatrix}(-3)\cdot(-6) & - & (-6)\cdot 3\\ (-6)\cdot 3 & - & 3\cdot(-6)\\ 3\cdot 3 & - & (-3)\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36\\0\\18\end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n}_{GHT} = \overrightarrow{TG}\times\overrightarrow{TH} = \begin{pmatrix}3\cdot(-6) & - & (-6)\cdot 3\\ (-6)\cdot(-3) & - & 3\cdot(-6)\\ 3\cdot 3 & - & 3\cdot(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\36\\18\end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

2. Schritt: Winkel zwischen Normalenvektoren berechnen

Für den Winkel α zwischen den beiden Normalenvektoren und damit auch zwischen den beiden Ebenen gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{n}_{FGT} \circ \overrightarrow{n}_{GHT}\right|}{\left|\overrightarrow{n}_{FGT}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{GHT}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{5}$$

Damit ist $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 78{,}463\,°$.

Zwei benachbarte Dreiecksflächen schneiden sich unter einem Winkel von etwa $78{,}463\,°$.

3. ► **Koordinaten von Fußpunkt und Spitze der Antenne bestimmen** (4BE)

Wir haben die Antenne bereits in der Zeichnung zu Teilaufgabe 1 eingezeichnet.

Berechne zunächst den **Schwerpunkt** des Dreiecks GHT, durch den der Antennenmast verläuft. Ermittle dann ausgehend von diesem die Koordinaten des Fußpunktes und der Spitze.

1. Schritt: Koordinaten des Schwerpunkts ermitteln

Nach der Information aus der Aufgabenstellung gilt für den Ortsvektor zum Schwerpunkt S:

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OT}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\15\\48\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\16\end{pmatrix}$$

Der Antennenmast durchstößt die Dachfläche GHT im Punkt $S\,(3 \mid 5 \mid 16)$.

2. Schritt: Koordinaten des Fußpunktes angeben

Der Antennenmast ist auf dem **Dachboden** verankert, d.h. der Fußpunkt liegt in der Ebene, die von den Punkten E, F, G und H aufgespannt wird. Alle Punkte dieser Ebene besitzen die x_3-Koordinate $x_3 = 14$.
Da der Antennenmast senkrecht auf dem Dachboden steht, gilt für den Fußpunkt $A_{\text{Fußpunkt}}$ also: $A_{\text{Fußpunkt}}\,(3 \mid 5 \mid 14)$.

3. Schritt: Koordinaten der Spitze angeben

Der Antennenmast ist 5 m lang. Da er im Fußpunkt beginnt und in der Spitze endet, hat diese die Koordinaten $A_{\text{Spitze}}\,(3 \mid 5 \mid 19)$.

4. ► **Lage des Schattens nachweisen** (6BE)

Der Fahnenmast „startet“ im Punkt $P\,(3 \mid 20 \mid 0)$ und ist 13 m hoch. Er „endet“ also im Punkt $Q\,(3 \mid 20 \mid 13)$.
Der Schatten, den dieser Fahnenmast wirft, startet ebenfalls im Punkt P. Er endet aber in einem Punkt Q'.

Die Idee ist nun folgende: Beschreibe die Sonnenstrahlen, welche durch den Punkt Q verlaufen, durch eine Gerade. Zeige dann, dass diese Gerade die Wand $CDHG$ des Trafohäuschens in einem Punkt trifft.

1. Schritt: Geradengleichung der Sonnenstrahlen aufstellen

Die Sonnenstrahlen verlaufen in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$. Sie verlaufen außerdem durch Punkt Q. Damit ergibt sich für die Gleichung einer Geraden:

$$g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Schnittpunkt von Gerade und Wand ausrechnen

Die Wand $CDHG$ liegt in einer Ebene, die parallel zur x_1, x_3-Koordinatenebene verläuft. Alle Punkte in dieser Ebene haben die x_2-Koordinate $x_2 = 6$. Als Ebenengleichung in Koordinatenform gilt somit: $E_{CDHG} : x_2 = 6$.

Berechne nun den Schnittpunkt von g mit E_{CDHG}. Zeige dann, dass dieser Schnittpunkt auch innerhalb des Vierecks $CDHG$ liegt:

$$\begin{aligned} g \cap E: \quad 20 - 7t &= 6 && \mid -20 \\ -7t &= -14 && \mid :(-7) \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Setze $t = 2$ ein in die Geradengleichung von g und erhalte den Punkt $Q'\,(5 \mid 6 \mid 5)$.

Ein Blick in die Zeichnung aus Teilaufgabe a) zeigt, dass Q' in der **Wand** $CDHG$ liegt, wenn für seine Koordinaten gilt:

$0 \leq x_1 \leq 6, \quad x_2 = 6, \quad 0 \leq x_3 \leq 14.$

Die Koordinaten von Q' erfüllen das. Damit liegt Q' innerhalb des Vierecks $CDHG$.

So hast du auch gezeigt, dass der Schatten des Fahnenmasts auf die Wand $CDHG$ des Trafohäuschens fällt.

▶ Länge des Schattens auf der Wand bestimmen

Der Schatten auf der Wand endet im Punkt Q'. Er beginnt in einem Punkt Q_{Start}. Die Frage ist nun: Welche Koordinaten hat dieser Anfangspunkt? Die Antwort ist nicht schwer:

Der Fahnenmast verläuft **senkrecht** zur x_1, x_2-Koordinatenebene. Auch die Wand $CDHG$ verläuft senkrecht zur x_1, x_2-Koordinatenebene.

Damit wird auch der Schatten des Mastes auf der Wand $CDHG$ **senkrecht** zur x_1, x_2-Koordinatenebene verlaufen. Der Anfangspunkt Q_{Start} liegt also direkt unterhalb des Punktes Q' und hat die Koordinaten $Q_{\text{Start}}\,(5 \mid 6 \mid 0)$.

Die Länge des Schattens auf der Wand entspricht nun genau dem **Abstand** der Punkte Q' und Q_{Start}.

Wegen $d = \left|\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OQ_{\text{Start}}}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right| = 5$ ist der Schatten auf der Wand 5 m lang.

5.1 ▶ **Radius berechnen** (8BE)

Die Kugel soll in den Dachraum eingebaut werden, d.h. sie liegt in der Pyramide $EFGHT$.

Maximales Volumen erhält die Kugel dann, wenn sie so groß ist, dass sie **alle Seitenflächen der Pyramide berührt**. Der Radius r der Kugel ist dann genau der Abstand des Mittelpunkts von den drei Seitenflächen und der Grundfläche der Pyramide.

Da die Pyramide gerade ist, liegt der Mittelpunkt der Kugel auf der **Höhe** der Pyramide, d.h. senkrecht unterhalb der Spitze $T\,(3 \mid 3 \mid 20)$. Der Abstand zur **Grundfläche** soll genau r sein. Da die Grundfläche auf Höhe $x_3 = 14$ liegt, befindet sich der Mittelpunkt M in einer Höhe von $x_3 = 14 + r$ und für den Mittelpunkt gilt vorläufig $M\,(3 \mid 3 \mid 14 + r)$.

Aufgrund der Höhe der Pyramide ist r dabei $0 \leq r \leq 6$.

Bei maximalem Volumen wird auch der Radius maximal. Gesucht ist folglich der Mittelpunkt M so, dass er **maximalen Abstand** von den Seitenflächen der Pyramide besitzt.

Da die Pyramide gerade ist, kannst du dich hier wieder auf eine Seitenfläche beschränken. Wir wählen die Seitenfläche FGT.

1. Schritt: Hessesche Normalenform bestimmen

Den Abstand eines Punktes von einer Ebene kannst du immer mit der **Hesseschen Normalenform** der Ebene bestimmen. Aus Teilaufgabe 2 ist dir der Normalenvektor der Ebene, in der die Seitenfläche liegt, bekannt: $n_{FGT} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. Als vorläufige Ebenengleichung in Normalenform erhalten wir $E_{FGT} : 2x_1 + x_3 = d$.

Einsetzen der Koordinaten von F, G oder T liefert einen Wert für d. Wir setzen die Koordinaten von F ein:

$2 \cdot 6 + 14 = 12 + 14 = 26 = d$.

Damit folgt die Ebenengleichung in Koordinatenform $E_{FGT} : 2x_1 + x_3 = 26$ und damit die Hessesche Normalenform der Ebene:

$$E_{FGT} : \frac{|2x_1 + x_3 - 26|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x_1 + x_3 - 26|}{\sqrt{5}} = d(P; E_{FGT}).$$

2. Schritt: M mit maximalem Abstand berechnen

Für den Abstand von $M\,(3 \mid 3 \mid 14 + r)$ von der Seitenfläche FGT und somit auch für den maximalen Radius gilt dann:

$$d(M; E_{FGT}) = r = \frac{|2 \cdot 3 + 14 + r - 26|}{\sqrt{5}} = \frac{|-6 + r|}{\sqrt{5}}$$

Wegen $0 \leq r \leq 6$ ist das Argument des Betrags immer **kleiner oder gleich Null**:

$$r = \frac{-(-6+r)}{\sqrt{5}} = \frac{-r+6}{\sqrt{5}} \qquad | \text{ Bruch aufteilen}$$

$$r = \frac{-r}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} \qquad | +\frac{r}{\sqrt{5}}$$

$$r \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$r \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}} \qquad | \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{5}+1} \approx 1{,}8541$$

Der Radius der Kugel ist 1,8541 LE.

▶ Folgen für den Antennenmast abschätzen

Der Antennenmast hat die x_2-Koordinate $x_2 = 5$. Die Frage ist nun: Ist die Kugel so groß, dass sie sich in x_2-Richtung so weit ausstreckt? Der Mittelpunkt liegt bei $x_2 = 3$. Mit dem Radius $r = 1{,}8541$ erstreckt sich die Kugel also maximal bis auf $x_2 = 4{,}8541$ und erreicht den Antennenmast damit nicht.

Der Antennenmast muss **nicht** umgesetzt werden.

5.2 **▶ Vorgehen beschreiben** (8BE)

Die Matrix soll die Projektion eines Punktes in die Ebene E beschreiben. Ohne Kenntnis der Matrix kann diese Projektion auch anders durchgeführt werden. (wie in Aufgabenteil 4)

1. Schritt: Geradengleichung der Sonnenstrahlen aufstellen

Die Sonnenstrahlen fallen in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein. Die Sonnenstrahlen, welche durch einen beliebigen Punkt $P\,(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ verlaufen, lassen sich also durch eine Gerade g_P beschreiben:

$$g_P : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Koordinaten des Schattenpunkts berechnen

Der Schatten liegt in der Ebene $E: 6x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$. Der Schattenpunkt P' entspricht also genau dem **Schnittpunkt** der Gerade g_P mit der Ebene E.
Für P' gilt dann:

$$g_P \cap E: \qquad 6 \cdot (p_1 + s) + 8 \cdot (p_2 - 7s) + (p_3 - 4s) = 0$$

$$6p_1 + 8p_2 + p_3 - 54s = 0$$

$$s = \frac{6p_1 + 8p_2 + p_3}{54}$$

Einsetzen von s in die Geradengleichung von g_P liefert die Koordinaten Schattenpunktes:

$$P'\left(p_1+\frac{6p_1+8p_2+p_3}{54}\mid p_2-7\cdot\frac{6p_1+8p_2+p_3}{54}\mid p_3-4\cdot\frac{6p_1+8p_2+p_3}{54}\right).$$

Auf einen Bruchstrich schreiben ergibt:

$$P'\left(\frac{60p_1+8p_2+p_3}{54}\mid\frac{-42p_1-2p_2-7p_2}{54}\mid\frac{-24p_1-32p_2+50p_3}{54}\right).$$

3. Schritt: Matrix bestimmen

Die Matrix hat drei Spalten. Sie geben jeweils das **Bild** (d.h. den „Schattenpunkt“) des jeweiligen **Einheitsvektors** an; d.h. Spalte 1 das Bild von e_1, Spalte 2 das Bild von e_2 und Spalte 3 das Bild von e_3.

Über den in Schritt 1 und Schritt 2 beschriebenen Weg kannst du die Bilder der Einheitsvektoren direkt bestimmen:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad e_1'=\begin{pmatrix}\frac{60}{54}\\\frac{-42}{54}\\\frac{-24}{54}\end{pmatrix}$$

$$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad e_2'=\begin{pmatrix}\frac{8}{54}\\\frac{-2}{54}\\\frac{-32}{54}\end{pmatrix}$$

$$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad e_3'=\begin{pmatrix}\frac{1}{54}\\\frac{-7}{54}\\\frac{50}{54}\end{pmatrix}$$

Aus diesen Vektoren folgt nun die Matrix:

$$A=\frac{1}{54}\cdot\begin{pmatrix}60&8&1\\-42&-2&-7\\-24&-32&50\end{pmatrix}$$