Gegeben sind die Punkte $A(3 \mid -2 \mid 4)$, $B(5 \mid 2 \mid 0)$, $C(1 \mid 6 \mid 2)$ und $E(8 \mid 5 \mid 9)$.

1. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D, sodass die Punkte A, B, C und D ein Quadrat bilden, und stellen Sie das Quadrat $ABCD$ und den Punkt E in einem geeigneten Koordinatensystem dar. (10BE)

2. Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene F an, in der das Viereck $ABCD$ liegt, und ermitteln Sie eine zugehörige Koordinatengleichung.
(Mögliches Ergebnis: $F: 2x + y + 2z = 12$) (7BE)

3. Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene H, die senkrecht auf F steht. (5BE)

4. Erklären Sie die folgende Rechnung und deuten Sie das Endergebnis (vgl. mit der Zeichnung aus Aufgabe 1). (8BE)

(1) Gesucht wird die Gerade g mit dem Stützvektor $\overrightarrow{e}$ und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{n}$, für den folgende zwei Bedingungen $I)$ und $II)$ gelten:

$$I) \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \qquad II) \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{n} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2) Gesucht wird der Punkt L auf der Geraden g mit folgender Bedingung für t:

$$2 \cdot (8 + 4t) + 1 \cdot (5 + 2t) + 2 \cdot (9 + 4t) = 12$$

$$\Rightarrow \quad t = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad L(2 \mid 2 \mid 3)$$

(3) Bestimmung des Endergebnisses:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{LE}\right| = 108$$