a) (1) ► **Bestimmen des Definitionsbereichs der Funktionen f_a** (7P)

Die Funktionenschar f_a ist eine Schar gebrochenrationaler Funktionen. Deine Aufgabe ist es hier, den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ dieser Funktionenschar zu bestimmen.

Da f_a eine gebrochenrationale Funktionenschar ist, untersuchst du diese beim Bestimmen des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ auf Definitionslücken. Betrachte dazu den Nenner des Funktionsterms von f_a.

Nenner: $x - a$.

Da eine Division durch Null nicht zulässig ist und hier eine Definitionslücke zur Folge hat, muss diese aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a ausgeschlossen werden. Die Funktionenschar f_a besitzt also eine Definitionslücke da, wo:
$x = a$
gilt.

Es ergibt sich hier also dieser Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq a\}$ bzw. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

(2) ► **Begründen, dass $x = a$ eine Polstelle ist**

Hier sollst du nun begründen, dass $x = a$ eine Polstelle der Funktionenschar f_a ist. Teile dazu zunächst den gebrochenrationalen Funktionsterm der Funktion f_a in Zähler- und Nennerfunktion auf:

Zählerfunktion: $Z_a(x) = (x - 3 \cdot a)^2$.
Nennerfunktion: $N_a(x) = x - a$.

Um die Polstelle bei $x = a$ richtig zu begründen zu können, gehst du im Folgenden auf die Definitionslücke von f_a bei $x = a$ eingehen.

An der Stelle $x = a$ gilt $N_a(a) = 0$, wobei $Z_a(a) \neq 0$ mit $a > 0$ gilt. Damit ist der Funktionsterm an der Stelle $x = a$ nicht definiert und die Schar f_a besitzt bei $x = a$ eine Polstelle.

(3) ► **Bestimmen der Gleichung der schrägen Asymptoten**

Deine Aufgabe ist es hier, die Gleichung der schrägen Asymptoten y der Scharfunktion f_a zu bestimmen. Da das Zählerpolynom mit $Z_a(x) = (x - 3 \cdot a)^2$ um einen Grad höher als das Nennerpolynom mit $N_a(x) = x - a$ ist, muss hier der Funktionsterm zunächst mittels Polynomdivision zerlegt werden. Die Funktionsgleichung der schrägen Asymptote bestimmst du also über folgende zwei Schritte:

1. Schritt: Zerlegen des Funktionsterm von f_a mittels Polynomdivision.

2. Schritt: Bestimmen des Grenzwerts der Zerlegung.

1. Schritt:

$$\begin{array}{l}
\left(x^2 - 6ax + 9a^2 \right) : \left(x - a \right) = x - 5a + \dfrac{4a^2}{x-a} \\
\underline{-x^2 + ax} \\
\quad -5ax + 9a^2 \\
\quad \underline{\;\;5ax - 5a^2} \\
\qquad\quad 4a^2
\end{array}$$

2. Schritt:

Betrachtet wird also diese Summe: $x - 5 \cdot a + \dfrac{4 \cdot a^2}{x - a}$.

Bilde nun den Grenzwert für $x \to \infty$ dieser Summe, um die Gleichung der schrägen Asymptote y der Scharfunktion f_a zu bestimmen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - 5 \cdot a + \frac{4 \cdot a^2}{x-a}\right) = \underbrace{x}_{\to\infty} - 5 \cdot a + \underbrace{\frac{4 \cdot a^2}{x-a}}_{\to 0}$$

Bei dieser Grenzwertbetrachtung strebt der gebrochenrationale Teil des betrachteten Terms gegen Null, während der lineare Teil gegen Unendlich strebt. Die Gleichung der schrägen Asymptoten y der Scharfunktion f_a ergibt sich also zu:

$y = x - 5 \cdot a$.

b) (1) ▶ **Ermitteln der Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_a** (13P)

Extremstellen befinden sich da, wo die erste Ableitungsfunktion der jeweiligen betrachteten Funktion Nullstellen besitzt (notwendige Bedingung). Dabei wird über die zweite Ableitungsfunktion der betrachteten Funktion die Art der jeweiligen Extrema festgestellt (hinreichende Bedingung). Für eine Beispielextremstelle bei x_E kann also gelten:

- $f''(x_E) < 0 \implies$ Bei x_E befindet sich ein Maximum.
- $f''(x_E) > 0 \implies$ Bei x_E befindet sich ein Minimum.

Gehe also beim Bestimmen der Koordinaten und der Art der lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a so vor:

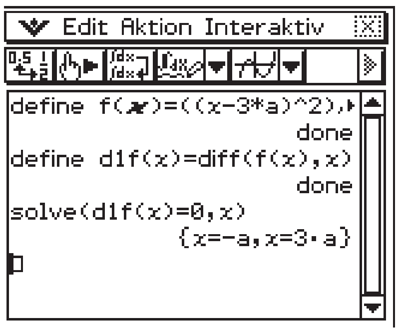
1. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f_a'.
2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung bei den im 2. Schritt bestimmten Extremstellen.
3. Schritt: Berechnen der y - Koordinaten der bestimmten Extremstellen.

1. Schritt:

Die erste Ableitungsfunktion f_a' kannst du mit deinem CAS bestimmen. Speichere dazu zunächst über `Define` den Funktionsterm der Scharfunktion f_a im Main-Modus deines CAS. Anschließend bestimmst du über diese Eingabenfolge die gesuchte erste Ableitungsfunktion:

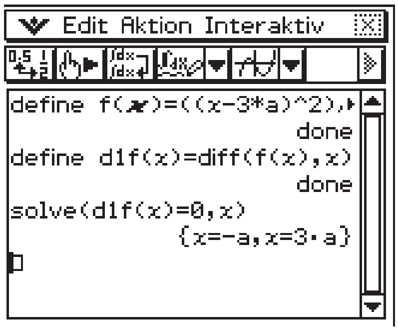
`keyboard → Calc → diff`

Hier wurde der Term der ersten Ableitungsfunktion f_a' unter `d1f` festgelegt.



Wie oben schon erwähnt, entsprechen die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f'_a den potentiellen Extremstellen der Scharfunktion f'_a.

Setze den Term der ersten Ableitungsfunktion f'_a mit Null gleich und löse die resultierende Gleichung nach x auf. Diese Gleichung kannst du mit deinem CAS lösen. Verwende dazu den `solve`-Befehl im Main-Modus deines CAS. Dieser Befehl löst die eingetragene Gleichung nach der Variablen, welche getrennt durch ein Komma hinter die zu lösende Gleichung eingetragen wird (siehe rechts).

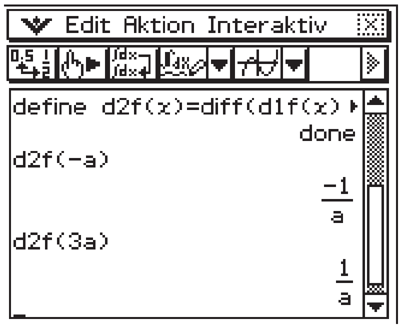


Die potentiellen Extremstellen von f_a befinden sich also bei: $x_{E_1} = 3 \cdot a$ und $x_{E_2} = -a$.

2. Schritt:

Bevor du die hinreichende Bedingung bei x_{E_1} und x_{E_2} überprüfen kannst kannst, ermittelst du den Term der zweiten Ableitungsfunktion f''_a von f_a.

Gehe dabei vor wie oben und bestimme die gesuchte Ableitungsfunktion f''_a mit deinem CAS. Hier wurde der Term der zweiten Ableitungsfunktion f''_a unter `d2f` festgelegt (siehe rechts).
Setze nun $x_{E_1} = 3 \cdot a$ und $x_{E_2} = -a$ in den Funktionsterm der zweiten Ableitungsfunktion f''_a ein, um die hinreichende Bedingung an den Extremstellen zu überprüfen.



- Da $f''_a(x_{E_1}) > 0$ gilt, befindet sich bei $x_{E_1} = 3 \cdot a$ ein Minimum.
- Da $f''_a(x_{E_2}) < 0$ gilt, befindet sich bei $x_{E_2} = -a$ ein Maximum.

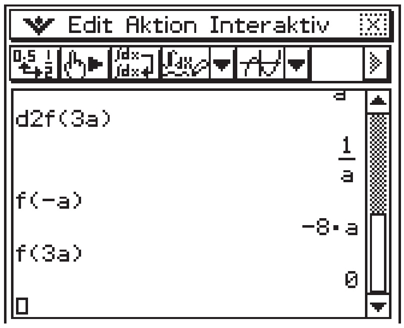
3. Schritt:

Die zu x_{E_1} und x_{E_2} zugehörigen y - Koordinaten bestimmst du, indem du die Extremstellen in den Funktionsterm von f_a einsetzt. Erledige das, wie im Schaubild rechts zu sehen ist, im Main-Modus deines CAS.

Die Koordinaten der Extrempunkte sind also:

$\Longrightarrow$ Hochpunkt bei $H_a\,(-a \mid -8 \cdot a)$.

$\Longrightarrow$ Tiefpunkt bei $T_a\,(3 \cdot a \mid 0)$.



(2) ► **Bestimmen der Gleichung der Geraden, auf der die lokalen Hochpunkte liegen**

Gesucht ist hier die Ortskurve o_1 der Hochpunkte des Graphen von f_a. Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass alle lokalen Hochpunkte des Graphen von f_a auf einer Geraden liegen.
Möchtest du diese Geradengleichung nun bestimmen, so stellst du die x - Koordinate von H_a zunächst nach Parameter a um. Hast du die x - Koordinate nach a umgestellt, so setzt du diese in die von a abhängige y - Koordinate des Hochpunkts H_a ein.

Umstellen der x - Koordinaten des Hochpunkts H_a nach Parameter a

$x_{H_a} = -a \;\Leftrightarrow\; a = -x_{H_a}$

Einsetzen der nach a umgestellten x - Koordinaten in die y - Koordinate von H_a

$y_{H_a} = -8 \cdot (-x) \;\Leftrightarrow\; y = 8 \cdot x.$

Die Ortskurve o_1, auf welcher alle Hochpunkte der Graphen von f_a liegen, ergibt sich also zu:

$o_1(x) = 8 \cdot x.$

(3) ▶ **Bestimmen der Gleichung der Geraden, auf der die lokalen Tiefpunkte liegen**

Gesucht ist nun die Ortskurve o_2 der Tiefpunkte der Graphen von f_a. Der Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass alle lokalen Tiefpunkte von f_a auf einer Geraden liegen. Möchtest du diese Geradengleichung nun bestimmen, so gehst du auch hier wie oben vor.

Umstellen der x - Koordinaten des Tiefpunkts T_a nach Parameter a

$x_{T_a} = 3 \cdot a \;\Leftrightarrow\; a = \dfrac{x_{T_a}}{3}$

Einsetzen der nach a umgestellten x - Koordinaten in die y - Koordinate von T_a

$y_{T_a} = 0.$

Da für die y-Koordinate des Tiefpunkts $y_{T_a} = 0$ gilt und diese Koordinate unabhängig vom Parameter a ist, besitzt jeder Tiefpunkt der Graphen von f_a die y-Koordinate von Null. Das heißt, jeder Tiefpunkt der Graphen der Scharfunktion f_a liegt auf der x-Achse. Für die Gleichung der gesuchten Ortskurve o_2 gilt also:

$o_2(x) = 0.$

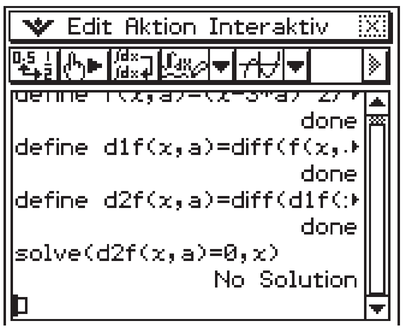
(4) ▶ **Begründen, dass keiner der Graphen einen Wendepunkt besitzt**

Eine Funktion besitzt eine Wendestelle da, wo die zweite Ableitungsfunktion der betrachteten Funktion Nullstellen besitzt (notwendige Bedingung). Weiterhin gilt für die dritte Ableitungsfunktion der jeweiligen Funktion an einer Wendestelle x_W:
$f'''(x_W) \neq 0.$

Willst du nun zeigen, dass keiner der Graphen der Scharfunktion f_a einen Wendepunkt besitzt, so zeigst du, dass f_a die oben genannten Bedingungen für eine Wendestelle nicht erfüllt.

Überprüfen der notwendigen Bedingung:

Setze den Funktionsterm von f_a'' gleich Null, um potentielle Wendestellen zu bestimmen. Die resultierende Gleichung kannst du dann wie oben, mit deinem CAS lösen. Verwende dazu auch hier wieder den `solve`-Befehl im Main-Modus deines CAS. Den Term der zweiten Ableitungsfunktion hast du oben schon bestimmt, dieser ist hier nach wie vor unter `d2f` festgelegt.



$\Longrightarrow$ Da der CAS `no-solution` liefert, besitzt die zweite Ableitungsfunktion f_a'' von f_a keine Nullstellen und folglich besitzen die Graphen von f_a keine Wendepunkte.

c) **▶ Angeben für welche Werte von a die jeweiligen Graphen gezeichnet worden sind** (3P)

Das in der Aufgabenstellung gegebene Schaubild zeigt verschiedene Graphen der Scharfunktion f_a. Deine Aufgabe ist es nun, für diese Graphen die jeweiligen Parameterwerte des Parameters a zu bestimmen.

Betrachtest du die Graphen G_{I}, G_{II} und G_{III} genauer, so kannst du erkennen, dass die Lage des Tiefpunkts der jeweiligen Graphen klar zu erkennen ist:

- $T_{G_{\text{I}}}(2 \mid 0)$.
- $T_{G_{\text{II}}}(4 \mid 0)$.
- $T_{G_{\text{III}}}(6 \mid 0)$.

Im vorhergegangenen Aufgabenteil hast du bestimmt, dass die Koordinaten des Tiefpunkts T_a von f_a in Abhängigkeit von a so lauten: $T_a(3 \cdot a \mid 0)$.

Setzt du nun die x - Koordinate der oben genannten Tiefpunkte von G_{I}, G_{II} und G_{III} mit der von a abhängigen x - Koordinaten von T_a gleich, so kannst du die zu G_{I}, G_{II} und G_{III} zugehörigen Parameterwerte bestimmen:

- $G_{\text{I}} : 3 \cdot a = 2 \;\Leftrightarrow\; a_{G_{\text{I}}} = \dfrac{2}{3}$.
- $G_{\text{II}} : 3 \cdot a = 4 \;\Leftrightarrow\; a_{G_{\text{II}}} = \dfrac{4}{3}$.
- $G_{\text{III}} : 3 \cdot a = 6 \;\Leftrightarrow\; a_{G_{\text{III}}} = 2$.

d) **▶ Untersuchen ob für $x > 1$ ein Punkt P mit minimalem Abstand zu $Q(1 \mid -4)$ existiert** (8P)

Nun sollst du den Graphen von f_1 betrachten. Die Funktion f_1 hat diesen Funktionsterm:

$f_1(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-1}$.

Deine Aufgabe ist es hier, zu untersuchen, ob es für $x > 1$ einen Punkt $P(x \mid f_1(x))$ gibt, dessen Abstand zum Punkt $Q(1 \mid -4)$ minimal ist. Gibt es einen solchen Punkt P, so ist es außerdem noch deine Aufgabe, dessen Koordinaten und Abstand zu Q anzugeben.

Willst du allgemein den Abstand d zwischen zwei beliebigen Punkten A und B berechnen, so verwendest du diese Formel:

$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ mit $A(x_A \mid y_A)$ und $B(x_B \mid y_B)$.

Willst du nun untersuchen, ob es für $x > 1$ einen Punkt $P(x \mid f_1(x))$ gibt, dessen Abstand zum Punkt $Q(1 \mid -4)$ minimal ist, so musst du zunächst in die obige Abstandsformel die allgemeinen Koordinaten eines Punktes einsetzen, der auf dem Graphen von f_a liegt. Diese sind: $P_{f_1}(x \mid f_1(x))$.

Setzt du ebenfalls die Koordinaten von Punkt Q in die Abstandsformel ein, so erhältst du einen von x abhängigen Term. Diesen Term kannst du als eine Abstandsfunktion d mit Funktionsterm $d(x)$ interpretieren, die für alle $x \in \mathbb{R}$ angibt, welchen Abstand der entsprechende Punkt auf dem Graphen von f_1 von Punkt Q hat.

Willst du nun ermitteln, ob es einen Punkt P nach obigen Vorgaben gibt, so untersuchst du d auf Minimalstellen. Gibt es eine Minimalstelle für $x > 1$, so gibt es einen Punkt P nach obigen Vorgaben. Bestimme in diesem Falle noch die Koordinaten von P und dessen Abstand zu Q.

Gehe hier also so vor:

1. Schritt: Aufstellen der Abstandsfunktion d
2. Schritt: Untersuchen der Abstandsfunktion auf Minimalstellen
3. Schritt: Gegebenenfalls Koordinaten von P und Abstand zu Q bestimmen

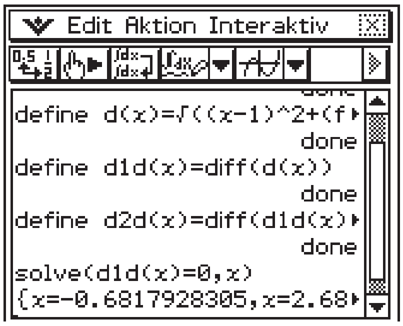
1. Schritt: Aufstellen der Abstandsfunktion *d*

Setzt du die allgemeinen Koordinaten von P und die Koordinaten von Q in die obige Abstandsformel ein, so sollte diese wie folgt aussehen:
$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (f_1(x) - (-4))^2}$.

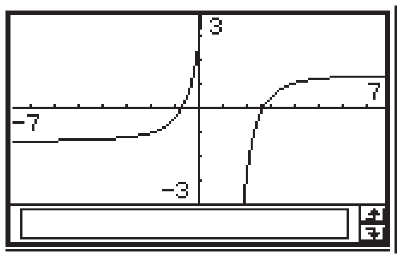
2. Schritt: Untersuchen der Abstandsfunktion auf Minimalstellen

Liegt an einer bestimmten Stelle x_M der Abstandsfunktion d eine Minimalstelle vor, so sind an dieser Stelle folgende zwei Bedingungen erfüllt:

- Notwendige Bedingung: $d'(x_M) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $d''(x_M) > 0$.



Leite also d zunächst einmal ab und bestimme anschließend durch Nullsetzen der ersten Ableitungsfunktion d' die potentiellen Extremstellen von d. Verwende beim Ableiten von d und Lösen der Gleichung $d'(x) = 0$, wie im Aufgabenteil b, dein CAS.
Die Ableitungsfunktion d' von d wurde hier unter `d1d` festgelegt. Die zu lösende Gleichung wurde, wie im Schaubild rechts zu sehen ist, mit Hilfe des `solve`-Befehls gelöst.
Die potentiellen Extremstellen der Abstandsfunktion d sind also: $x_1 \approx -0{,}682$ und $x_2 \approx 2{,}682$. Mit x_2 ist eine Extremstelle gegeben, die zusätzlich noch die Bedingung $x > 1$ erfüllt (siehe oben).

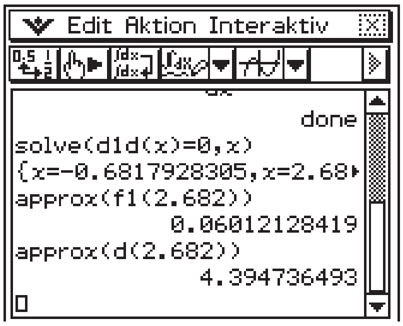


Lässt du dir den Graphen der ersten Ableitungsfunktion d' von d im Graphs-Modus deines CAS anzeigen, so kannst du erkennen, dass an der Nullstellen $x_2 \approx 2{,}682$ das Vorzeichen des Graphen von d' von $-$ nach $+$ wechselt, was auf eine Minimalstelle hinweist.

Da $d''(x_2) > 0$ gilt, liegt an der Stelle $x_2 = 2{,}682$ ein Minimum vor, was bedeutet, dass ein Punkt P mit $x > 1$ existiert, dessen Abstand zum Punkt Q minimal ist.

3. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von P und dessen Abstand zum Punkt Q

Willst du die vollständigen Koordinaten von P bestimmen, so setzt du die Stelle $x_2 = 2{,}682$ in den Funktionsterm von f_1 ein, um so die y-Koordinate von P zu bestimmen. Den Abstand d von P zu Q ermittelst du, indem du $x_2 = 2{,}682$ in den Funktionsterm der oben aufgestellten Abstandsfunktion d einsetzt. Verwende zum Berechnen dieser beiden Werte dein CAS.

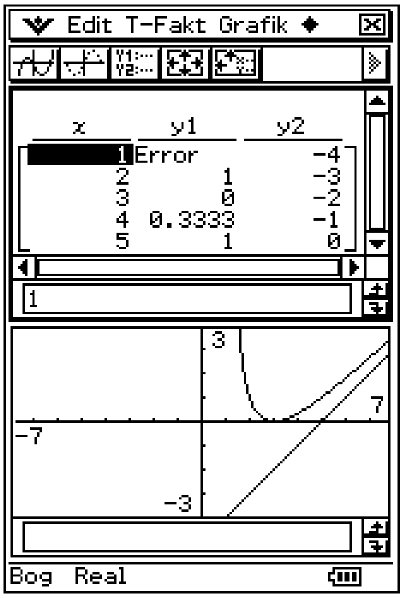


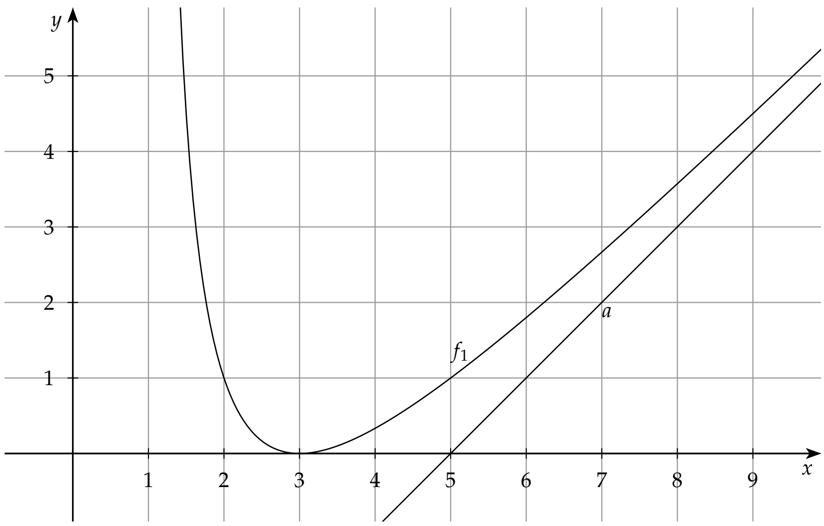
$\Longrightarrow$ Die vollständigen Koordinaten von P sind $P(2{,}682 \mid 0{,}0602)$. P besitzt einen Abstand von $4{,}395$ LE zum Punkt Q.

e) (1) ▶ **Überprüfen, ob der Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann** (10P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph von f_1, die Gerade mit der Gleichung $a(x) = x - 5$, die x-Achse, sowie die Senkrechte $x = 3$ eine Fläche einschließen, welche ins Unendliche reicht. Deine Aufgabe ist es dabei zu überprüfen ob der eben beschriebenen Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann. Dabei kann es hier sinnvoll sein, wenn du zunächst eine Skizze des Sachverhalts anfertigst.

Verwende dazu den Graphik-Modus deines CAS. In diesem zeichnest du zunächst den Graphen der Funktion f_1, sowie den Graphen der schiefen Asymptote a. Anschließend lässt du dir dann die zugehörige Wertetabelle anzeigen, welche dir beim Skizzieren der Graphen behilflich sein kann.





Der oben beschriebene Flächeninhalt berechnet sich über die Differenz zweier Integrale. Die untere Grenze des ersten Integrals bildet dabei die Senkrechte bei $x = 3$, es gilt also $x_0 = 3$. Die obere Grenze des ersten Integrals reicht bis ins Unendliche, für diese nimmst du zunächst eine Variable an, es könnte also $x_1 = g$ gelten. Der Graph von f_1 verläuft im gesamten betrachteten Intervall oberhalb der Geraden mit der Gleichung $a(x) = x - 5$. Deshalb musst du über die Gerade ab deren Nullstelle bei $x_2 = 5$ integrieren und dieses Integral vom eben beschriebenen subtrahieren. Auch bei diesem Integral reicht die obere Grenze ins Unendliche, es gilt also: $x_3 = g$.

Mit diesen Annahmen folgt für den zu berechnenden Flächeninhalt A:

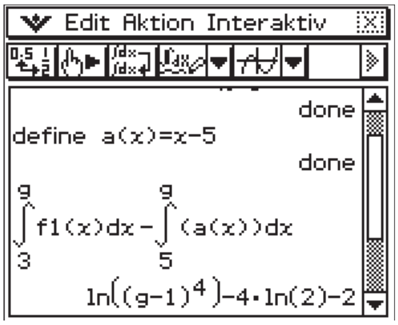
$$A(g) = \int_{x_0}^{x_1} (f_1(x))\, \mathrm{d}x - \int_{x_2}^{x_3} (a(x))\, \mathrm{d}x = \int_{3}^{g} (f_1(x))\, \mathrm{d}x - \int_{5}^{g} (x-5)\, \mathrm{d}x \text{ mit } g > 3.$$

Berechne das oben beschriebene Integral zunächst mit g als unbekannter fester oberer Grenze des Integrals.

Verwende dazu dein CAS. Den Integralbefehl fügst du in den Main-Modus deines CAS über diese Eingabenfolge ein:

`keyboard → Calc → int`.

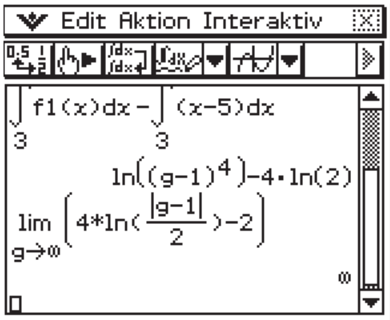
Wende den Integralbefehl wie im Schaubild rechts an, um den von g abhängigen Flächeninhalt A zu bestimmen.



Für den Flächeninhalt A gilt also:

$$A(g) = \ln\left((g-1)^4\right) - 4 \cdot \ln(2) - 2 = 4 \cdot \ln\left(\frac{|g-1|}{2}\right) - 2.$$

Um nun zu untersuchen, ob dem in der Aufgabenstellung beschriebenen Flächeninhalt A ein endlicher Wert zugeordnet werden kann, bildest du hier den Grenzwert für $g \to \infty$ und verschiebst damit die obere Integralsgrenze ins Unendliche. Verwende dazu ebenfalls deinen CAS. Füge über die unten stehende Eingabenfolge den `Limes`-Befehl in den Main - Modus ein und berechne den Grenzwert wie im Schaubild rechts.



`keyboard → Calc → lim`.

Für den Grenzwert gilt also:

$$\lim_{g\to\infty} \left(4 \cdot \ln\left(\frac{|g-1|}{2}\right) - 2\right) = \infty.$$

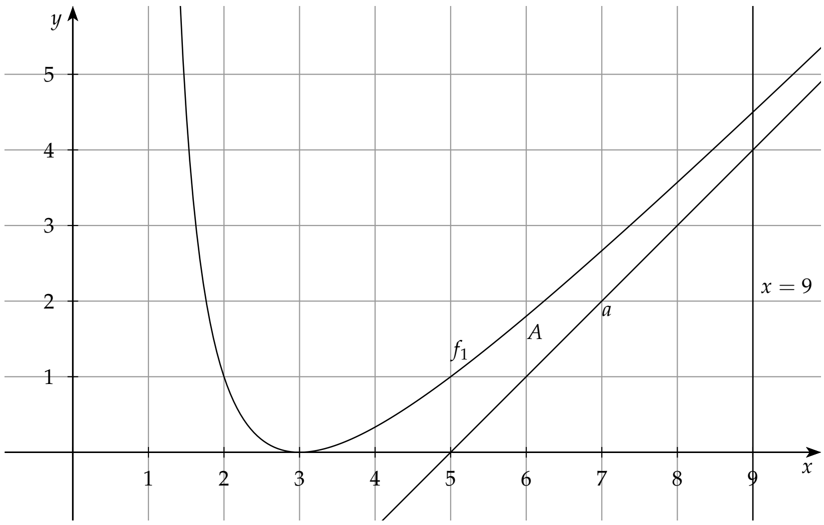
$\Longrightarrow$ Da der Flächeninhalt für $g \to \infty$ ins Unendliche strebt, kann dem Flächeninhalt der beschriebenen Fläche kein reeller Wert zugeordnet werden.

(2) ▶ **Berechnen des Volumens V des Hohlraumes**

Die oben beschriebene Fläche wird nun nach rechts durch $x = 9$ begrenzt. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein nach rechts offener Hohlkörper mit einem kegelförmigen Hohlraum. Deine Aufgabe ist es dabei, dass Volumen V dieses Hohlraums zu bestimmen.

Beim Lösen dieser Aufgabe kann es sinnvoll sein, wenn du dir zuerst eine Skizze des Sachverhalts anfertigst.

Verwende dazu wie oben wieder den `Graphs`-Modus deines CAS. Die Skizze des Sachverhalts sollte dann so aussehen:



Die Fläche mit dem Flächeninhalt A repräsentiert den Querschnitt des Hohlraums des nach rechts offenen Hohlkörpers. Wie du der Skizze oben entnehmen kannst, wird diese „nach oben“ begrenzt durch den Graphen der Funktion f_1 und „nach unten“ wird sie begrenzt durch die schiefe Asymptote a mit $a(x) = x - 5$.

Willst du das Volumen V des Hohlraums berechnen, so lässt du die Fläche mit dem Flächeninhalt A um die x-Achse rotieren. Für eine beliebige Funktion h berechnet sich das Rotationsvolumen V_h zwischen zwei beliebigen Grenzen x_a und x_b (wobei $x_a < x_b$ gilt) über diesen Ansatz:

$$V_h = \pi \cdot \int_{x_a}^{x_b} (h(x))^2 \, dx.$$

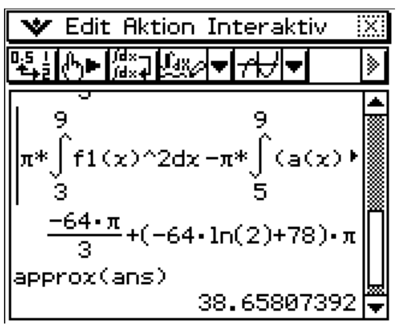
Bei der Berechnung des Volumens V des Hohlraums musst du jedoch beachten, dass sich das Volumen V aus der Differenz des Volumens V_1, welches f in den Grenzen zwischen $x_{u_1} = 3$ und $x_{o_1} = 9$ einschließt, und des Volumens V_2, welches a in den Grenzen $x_{u_2} = 5$ und $x_{o_2} = 9$ einschließt (siehe Skizze), berechnet.

Berechnen des gesuchten Volumens V

Nach den oben getroffenen Annahmen berechnet sich das Volumen V des Hohlraums also über diesen Ansatz:

$$V = |V_1 - V_2| = \left| \pi \cdot \int_3^9 (f_1(x))^2 \, dx - \pi \cdot \int_5^9 (a(x))^2 \, dx \right|.$$

Lege die Funktionsterme von f_1 und a im Main-Modus deines CAS fest und füge wie oben, den Integralbefehl ein. Berechne anschließend, wie im Schaubild rechts, das gesuchte Volumen V des Hohlraumes.



$\Longrightarrow$Das gesuchte Volumen des Hohlraumes beträgt ungefähr 38,66 cm^3.

f) (1) ▶ **Modellierung der Gleisverbindung durch eine ganzrationale Funktion** (5P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die beiden Graphenteile von f_1 Bestandteile eines Eisenbahnnetzes sind. Dabei soll zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen von f_1 eine neue Gleisverbindung gebaut werden. Weiterhin soll der Übergang zu der durch f_1 modellierten Strecke an beiden Punkten jeweils „ohne Knick“ erfolgen, was bedeutet, dass die zu modellierende Funktion in beiden Punkten den gleichen Anstieg wie f_1 besitzen muss.
Deine Aufgabe ist es nun, eben diese neue Gleisverbindung durch eine ganzrationale mit möglichst geringem Grad zu modellieren.

Wie oben schon beschrieben, soll der Graph der zu modellierenden Funktion h durch die Extrempunkte des Graphen von f_1 bei

- $H_1(-1 \mid -8)$
- $T_1(3 \mid 0)$

verlaufen und dabei soll dieser Übergang „ohne Knick“ erfolgen, das heißt, dass h in diesen Punkten die gleiche Steigung wie f_1 besitzen muss. Es ergeben sich also insgesamt vier Bedingungen an die Modellierungsfunktion h, was zu Folge hat, dass diese mindestens einen Grad von 3 besitzen muss.

Die allgemeine Form des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist: $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

Um Parameter $a,\ b,\ c$ und d zu ermitteln, bedarf es hier also insgesamt vier Bedingungen an die Modellierungsfunktion h. Zwei dieser Bedingungen ergeben sich aus der Forderung, dass der Graph von h durch die Punkte H_1 und T_1 verlaufen soll:

I $h(-1) = -8$
II $h(3) = 0$

Weiterhin soll h bei $x_H = -1$ und $x_T = 3$ die gleiche Steigung wie f_1 besitzen. Da es sich bei $x_H = -1$ und $x_T = 3$ um Extremstellen handelt, liegt hier eine Steigung von Null vor. Leite h also zuerst in Abhängigkeit von $a,\ b,\ c$ und d wie oben mit deinem CAS ab und bilde anschließend die zwei weiteren Bedingungen an die Modellierungsfunktion h:

III $h'(-1) = 0$
IV $h'(3) = 0$

Es ergibt sich also dieses Gleichungssystem:

I $h(-1) = -8$
II $h(3) = 0$
III $h'(-1) = 0$
IV $h'(3) = 0$

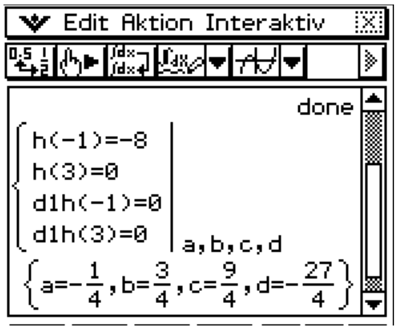
Löse dieses lineare Gleichungssystem nun mit Hilfe deines CAS. Lege dazu zunächst die Funktionsterme von h und h' in Abhängigkeit der zu bestimmenden Parameter a, b, c und d fest. Der Funktionsterm der ersten Ableitungsfunktion h' von h wurde hier unter `d1h` festgelegt.

Füge nun über diese Eingabenfolge eine Gleichungssystem mit vier Gleichungen und Variablen in den Main-Modus deines CAS ein:

`keyboard → 2D`

Symbol dritte Reihe, dritte Spalte.

Hast du anschließend, die Gleichungen I bis IV in das Gleichungssystem übertragen, so sollte dieses und das zugehörige Ergebnis wie im Schaubild rechts aussehen.



$\Longrightarrow$ Der Funktionsterm der Modellierungsfunktion h dritten Grades ergibt sich also zu:
$h(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x - \frac{27}{4}$.

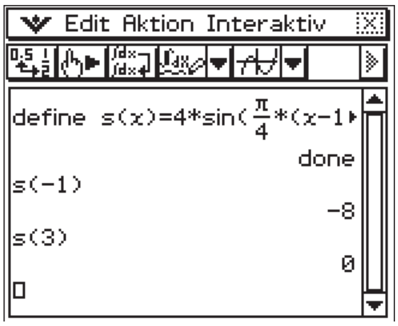
(2) ▶ **Überprüfen, ob auch s die geforderten Bedingungen erfüllt**

Damit die Funktion s, mit $s(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot (x-1)\right) - 4$ ebenfalls als Modellierungsfunktion für die neue Gleisverbindung in Frage kommt, muss diese folgende Bedingungen erfüllen:

- Der Graph von s muss durch die Extrempunkte des Graphen von f_1 verlaufen. Es muss also gelten:
  $\Rightarrow$ $s(-1) = -8$ und $s(3) = 0$.
- Der Übergang an den beiden Extrempunkten soll ohne „Knick" verlaufen. Es muss also gelten:
  $\Rightarrow$ $s'(-1) = 0$ und $s'(3) = 0$.

1. Schritt: Überprüfen der Funktionswerte $s(-1)$ und $s(3)$

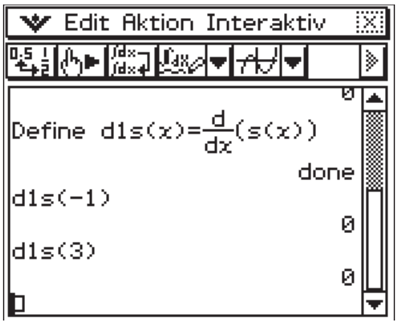
Lege den Funktionsterm von s im Main-Modus deines CAS fest und berechne wie oben die Funktionswerte von s an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$:



Der Graph von s verläuft also durch die Extrempunkte des Graphen von f_1.

2. Schritt: Überprüfen der Ableitungswerte $s'(-1)$ und $s'(3)$

Bilde die erste Ableitungsfunktion s' von s wie in den Aufgabenteilen zuvor mit deinem CAS und berechne anschließend so die Ableitungswerte an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$:



$\Longrightarrow$Da $s(-1) = -8$, $s(3) = 0$, $s'(-1) = 0$ und $s'(3) = 0$ gilt, erfüllt Funktion s die geforderten Bedingungen und kommt als Modellierungsfunktion des Sachverhalts in Frage.