a) **► Fehlende Werte in der Tabelle ergänzen** (7P)

Gesucht sind die fehlenden Einträge in der Tabelle, die der Spieler angelegt hat. Dabei hat er auf ZZ gesetzt. Das heißt, er gewinnt, wenn

- er zweimal Zahl wirft (ZZ) und wenn
- er dafür höchstens 5 Versuche benötigt,

und er verliert, wenn

- er zweimal Wappen wirft (WW) oder
- wenn er es nicht schafft, mit höchstens 5 Versuchen ZZ zu werfen.

Ein Versuch entspricht hier dem zweimaligen Wurf der Münze, bei dem die Kombinationen ZZ, WW, ZW und WZ auftreten können. ZW und WZ sind dabei neutral, bei ZZ gewinnt der Spieler, bei WW verliert er automatisch.

► Das Vertrauensintervall ($\gamma = 95\,\%$) bestimmen

Gesucht ist das Intervall, in welchem sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die unbekannte Wahrscheinlichkeit befindet.

Sei X die Anzahl der Spiele. X kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 50$ und p unbekannt.

Bestimme zunächst die Werte für die Größen σ und μ nach den angegebenen Formeln:

$$\mu = n \cdot p = 50p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50p \cdot (1-p)}$$

Aus den σ-Regeln folgt dann wegen $\gamma = 95\,\%$:

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95.$$

Durch Einsetzen erhältst du anschließend:

$$P\left((p-h)^2 \leq \frac{1{,}96^2 \cdot \sigma^2}{50^2}\right) \approx 0{,}95$$

Betrachte also die innere Ungleichung

$$(p-h)^2 \leq \frac{1{,}96^2 \cdot \sigma^2}{50^2}$$

Setze nun die Werte für h und σ ein und löse die Ungleichung nach der gesuchten Wahrscheinlichkeit p auf. Das Intervall hat dann die Form

$$\left(p - \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50}; p + \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{50}\right).$$

b) **► Baumdiagramm zum Spiel zeichnen** (8P)

Gesucht ist ein Baumdiagramm zum Spiel, das dabei helfen soll, zu entscheiden, ob die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oder zu verlieren gleich hoch ist.

Das heißt, du benötigst einen binären Baum, also einen Baum, dessen Äste sich immer in zwei weitere Äste aufteilen. Beim Wurfspiel gibt es aber noch die Option „unklar", wenn das Spiel bei den Wurfergebnissen WZ und ZW noch nicht entschieden ist.

Der Ansatz für das Baumdiagramm sieht also wie rechts abgebildet aus:

Bei Gewinn oder Verlust verzweigt sich der Baum nicht, ist der Ausgang des Spiels unklar, unterteilt sich der Ast in drei weitere Äste, nämlich „gewonnen"(g), „verloren"(v) oder „unklar"(u), wenn das Spiel noch nicht vorbei ist.

Gewonnen hat der Spieler, wenn ZZ auftaucht. Da es insgesamt vier mögliche Würfe gibt, ist die Wahrscheinlichkeit ZZ zu erzielen:

$p = 0,25$

► Wahrscheinlichkeit für einen Sieg berechnen und das Ergebnis interpretieren

Am Baumdiagramm kannst du erkennen: Es gibt insgesamt 5 Pfade die mit einem Gewinn enden. Berechne die einzelnen Wahrscheinlichkeiten und addiere sie zur Gesamtwahrscheinlichkeit für einen Sieg nach der Pfadregel zusammen.

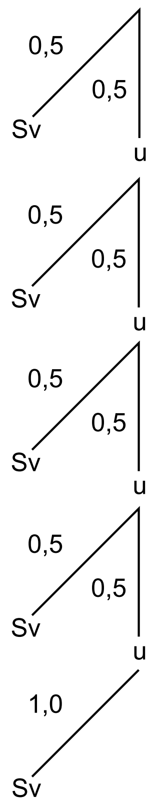
c) **► Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bestimmen** (7P)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die in diesem Fall der Zahl der Würfe bei einem Spiel entspricht, ist die *Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte*, die die Zufallsgröße X als Tabelle oder Diagramm zeigt.
Im Fall des Wurfspiels kann X Werte von 1 bis 5 annehmen. Bestimme also die Wahrscheinlichkeiten für alle diese möglichen Anzahlen von Würfen und stelle sie als Tabelle dar.

Nutze dazu ein Baumdiagramm, das zwischen „Spiel vorbei"(Sv) und „unentschieden"(u) unterscheidet. Jeder Pfad, der mit Sv endet, ist dann ein Pfad mit einer bestimmten Anzahl von Würfen. Du kannst dann die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Pfade nach der Pfadregel berechnen und anschließend in die Tabelle eintragen.

Wenn der Spieler WW oder ZZ wirft, ist das Spiel sofort vorbei. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel beendet wird, liegt damit bei 50 %. Entsprechend geht ein Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % unentschieden aus. Nur beim fünften Wurf wissen wir, dass das Spiel dann endet. Dort beträgt die Wahrscheinlichkeit für Sv 100 %.

Das zugehörige Baumdiagramm kann etwa wie rechts abgebildet aussehen.



► Erwartungswert berechnen und im Sachzusammenhang interpretieren

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X für die Anzahl der Würfe ist derjenige Wert, der angibt, wie viele Würfe durchschnittlich pro Spiel gemacht werden. Um diesen Wert zu ermitteln, benötigst du die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die du zuvor berechnet hast.

Der Erwartungswert $E(X)$ ergibt sich aus der Summe der Produkte der Wahrscheinlichkeiten für die Anzahlen X der Würfe mit den Zahlen X selbst:

$E(X) = x_1 \cdot p_1 + ... + x_n \cdot p_n$