a) **▶ Koordinaten des Schnittpunktes bestimmen** (9P)

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der x-y-Ebene. Alle Punkte in dieser Ebene haben die z-Koordinate $z = 0$ und besitzen somit allgemein die Koordinaten $S\,(x \mid y \mid 0)$. Du kannst diese Koordinaten in die Geradengleichung von g einsetzen und die dritte Zeile nach dem Parameterwert für r auflösen. Setze anschließend diesen Wert wieder in die Geradengleichung von g ein und du erhältst die Koordinaten von S.

▶ Abstand von S vom Koordinatenursprung angeben

Der Koordinatenursprung hat die Koordinaten $O\,(0 \mid 0 \mid 0)$. Du sollst den Abstand des Punktes S vom Punkt O berechnen. Für den Abstand d zweier Punkte $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ und $Q\,(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ gilt allgemein:

$$d = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

Setze die Koordinaten von S und O in diese Gleichung ein.

▶ Größe des Schnittwinkels von g mit der x-y-Ebene berechnen

Die Gerade g schließt mit der x-y-Ebene einen Winkel α ein. Der Winkel wird also von einer Geraden und einer Ebene eingeschlossen. Für einen Winkel α zwischen einer Geraden und einer Ebene gilt allgemein:

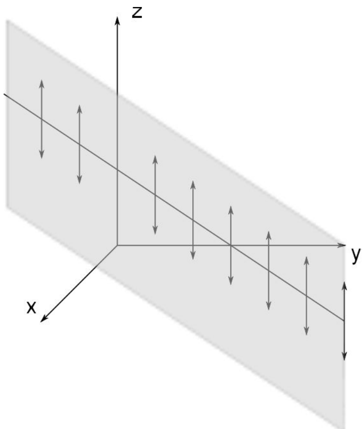
$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|},$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene und $\vec{v}$ der Richtungsvektor der Geraden ist.

b) **▶ Lage der Ebene E im Koordinatensystem beschreiben** (12P)

Eine Parametergleichung der Ebene E ist dir in der Aufgabenstellung mit

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$



Du kannst erkennen, dass der erste Spannvektor die z-Koordinate $z = 0$ hat. Außerdem ist der zweite Spannvektor der Normalenvektor der x-y-Ebene.
Der Stützvektor und der erste Spannvektor alleine würden also eine **Gerade** beschreiben, welche parallel zur x-y-Ebene verläuft.

▶ Gleichung der Schnittgeraden von E und der x-y-Ebene ermitteln

Du weißt bisher:

- Die Ebene E verläuft senkrecht zur x-y-Ebene.
- Einer ihrer Spannvektoren verläuft parallel zur x-y-Ebene. Verwende ihn als Richtungsvektor der Geraden.

Somit kennst du bereits den Richtungsvektor der gesuchten Gerade, nämlich $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es fehlt noch der Stützvektor. Suche hierzu einen Punkt der Ebene E, der gleichzeitig in der x-y-Ebene liegt.

▶ Gleichung von E in Koordinatenform bestimmen

Die Koordinatenform der Ebenengleichung lautet allgemein

$E : ax + by + cz = d,$

wobei a, b und c die Koordinaten des Normalenvektors sind. Den Parameterwert für d kannst du zum Schluss mithilfe einer Punktprobe berechnen. Du kannst so vorgehen:

- Ermittle zunächst, z.B. über das Vektorprodukt der Spannvektoren, einen Normalenvektor der Ebene E.
- Setze dessen Koordinaten ein in die allgemeine Koordinatenform der Ebenengleichung.
- Wähle einen Punkt, der in der Ebene E liegt, und führe eine Punktprobe durch. Bestimme so den Wert für d.

▶ Lagebeziehung von h und E untersuchen

Auch die Gleichung der Geraden h ist dir zu Beginn in der Aufgabenstellung gegeben. Du sollst untersuchen, wie die Gerade h und die Ebene E zueinander liegen, d.h., ob sie sich schneiden, ob sie parallel verlaufen oder ob die Gerade h in der Ebene E enthalten ist. Du kannst so vorgehen:

- Untersuche zunächst, ob die Gerade h parallel zur Ebene E verläuft. Dies ist der Fall, wenn der Normalenvektor der Ebene E senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden h verläuft. Berechne also das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Wenn es Null ergibt, so verlaufen h und E parallel.
- Falls die Gerade und die Ebene parallel sind, untersuche nun mithilfe einer Punktprobe, ob h in E enthalten ist oder ob sie echt parallel verlaufen.
- Falls die Gerade und die Ebene nicht parallel sind, dann schneiden sie sich in einem Punkt. Diesen kannst du berechnen, indem du die Geradengleichung von h in die drei Zeilen $x = \ldots$, $y = \ldots$ und $z = \ldots$ aufteilst und dann in die Koordinatengleichung von E einsetzt. Löse die so entstehende Gleichung nach s auf und bestimme dann den Schnittpunkt der Geraden h und der Ebene E.

c) **▶ Entscheiden, ob die Flugzeuge kollidieren könnten** (5P)

Die Gerade h beschreibt die Flugbahn eines Airbus und die Gerade g die Flugbahn einer Boeing. Die Flugzeuge könnten kollidieren, wenn sich die Flugbahnen kreuzen, d.h. wenn die beiden Geraden einen Schnittpunkt aufweisen. Folglich ist auch in dieser Aufgabe eine Lagebeziehung zu untersuchen.

Du kannst ähnlich vorgehen wie in Aufgabenteil b):

- Setze die Gleichungen der Geraden g und h gleich und erhalte daraus ein lineares Gleichungssystem.
- Wenn das LGS lösbar ist, dann schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt und die Flugzeuge könnten kollidieren.
- Wenn das LGS nicht lösbar ist, dann schneiden sich die Flugbahnen nicht und es besteht keine Kollisionsgefahr.

d) **▶ Abstand zur Flugbahn h des Airbus berechnen** (4P)

Die Boeing befindet sich im Punkt $P\,(-4 \mid 3 \mid 2)$ und es soll der Abstand des Flugzeugs zur Flugbahn h des Airbus berechnet werden. Du sollst also den Abstand eines Punktes von einer Geraden bestimmen. Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Der Abstand von Punkt P und der Geraden h entspricht also dem Abstand von Punkt P und dem **Lotfußpunkt** von P auf h. Zur Bestimmung dieses Lotfußpunkts L bieten wir zwei mögliche Lösungswege an:

- Eine Lösung über das Skalarprodukt (Lösungsweg A),
- eine Lösung über eine Hilfsebene (Lösungsweg B).

▶▶ Lösungsweg A: Lösung über das Skalarprodukt

Der Lotfußpunkt L liegt auf der Geraden h. Er hat also allgemein die Koordinaten $L\,(-3,5 \mid 2s \mid 3+s)$; diese Koordinaten gehen aus der Geradengleichung von h hervor.

Da der Abstand des Punktes P zur Geraden h senkrecht zu h gemessen wird, muss der Vektor $\overrightarrow{PL}$ **senkrecht** auf der Geraden h stehen, genauer gesagt: Der Vektor $\overrightarrow{PL}$ muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden h stehen. Dies ist der Fall, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ist. Du kannst so vorgehen:

- Berechne das Skalarprodukt des Vektors $\overrightarrow{PL}$ mit dem Richtungsvektor der Geraden h.
- Berechne s so, dass dieses Skalarprodukt den Wert Null annimmt.
- Setze den Wert für s den Vektor $\overrightarrow{PL}$. Berechne dann den Betrag dieses Vektors. Dies ist dann der Abstand von P zur Geraden h.

▶▶ Lösungsweg B: Lösung über eine Hilfsebene

Der Lotfußpunkt L liegt auf der Geraden h. Da der Abstand des Punktes P zur Geraden h senkrecht zu h gemessen wird, muss der Vektor $\overrightarrow{PL}$ **senkrecht** auf der Geraden h stehen, genauer gesagt: Der Vektor $\overrightarrow{PL}$ muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden h stehen.

Du kannst so vorgehen:

- Definiere eine Hilfsebene H in Koordinatenform. Wähle als Stützvektor den Vektor $\overrightarrow{OP}$ und als Normalenvektor der Richtungsvektor von h.
- Diese Ebene H enthält den Punkt P und verläuft senkrecht zur Geraden h. Der Schnittpunkt der Hilfsebene H und der Geraden h ist also der Lotfußpunkt L.
- Berechne den Schnittpunkt von H und h. Teile dazu die Geradengleichung von h in die drei Zeilen $x = \ldots$, $y = \ldots$ und $z = \ldots$ auf und setze sie an der entsprechenden Stelle in die Koordinatengleichung von H ein. Löse die resultierende Gleichung nach s auf und setze diesen Wert für s in die Geradengleichung von h ein, um die Koordinaten des Lotfußpunkts L zu ermitteln.
- Bestimme zuletzt die Länge des Vektors $\overrightarrow{PL}$. Dies ist der Abstand von P und L und damit auch der Abstand von P und h.