a) ▶ **Skizze der Graphen von f_2 und f_4** (20P)

In diesem Aufgabenteil sollst du eine Skizze zu den Graphen von f_2 und f_4 anfertigen. Setze hierzu $k = 2$ und $k = 4$ in den Funktionsterm der Funktionenschar f_k ein.
Die Graphen von f_2 und f_4 kannst du dir nun von deinem GTR anzeigen lassen. Trage dafür die Funktionsterme von f_2 und f_4 in das `Y=` - Menü des GTR ein. Mit der `GRAPH` - Taste kannst du dann in den Anzeigemodus des GTR wechseln, in dem er dir beide Graphen darstellt. Lasse dir die Graphen von f_2 und f_4 im gegebenen Definitionsintervall $0 \leq x \leq 6$ anzeigen. Du kannst also Xmin = 0 und Xmax = 6 wählen. Damit erhältst du dann dieses Bild und mit `2ND` → `Table` folgende Wertetabellen auf dem GTR.

▶ **Bestimmen der Hochpunkte H_k der Graphen von f_k**

Nun sollst du die Hochpunkte H_k der Graphen der Funktionenschar f_k bestimmen. Mit Hilfe des GTR kannst du zunächst einmal die Hochpunkte H_2 und H_4 der Graphen von f_2 und f_4 bestimmen. Verwende dazu im Graphs-Modus oder Menü den Befehl:

`2nd → CALC → 4:maximum`

Dabei musst du die Grenzen des Intervalls festlegen, in dem der Rechner den jeweiligen Hochpunkt ermitteln soll.
So erhältst du den Hochpunkt H_2 des Graphen von f_2 und H_4 des Graphen von f_4. Mit Hilfe der Koordinaten der beiden Hochpunkte kannst du dann Vermutungen bezüglich der Lage aller Hochpunkte H_k anstellen. Im Folgenden musst du dann aber noch die Richtigkeit deiner Vermutungen beweisen.

▶ **Beweisen der Aussage und Interpretieren ihrer Bedeutung für die Geometrie**

In diesem Aufgabenteil sollst du beweisen, dass die Aussage:

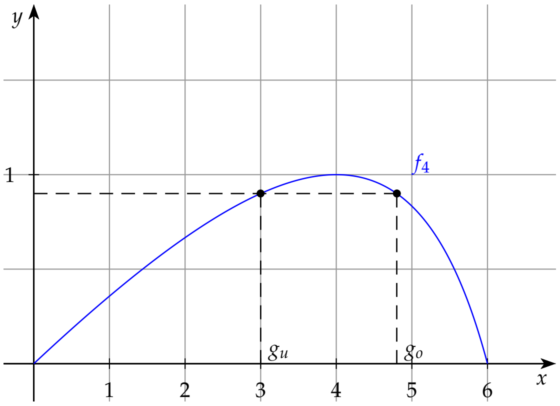
$$f_2(3+z) = f_4(3-z)$$

für alle z mit $-3 \leq z \leq 3$ gilt und die Bedeutung dieser Aussage im geometrischen Zusammenhang interpretieren.
Um diese Aussage zu beweisen setzt du $x = 3+z$ in den Funktionsterm von f_2 und $x = 3-z$ in den Funktionsterm von f_4 ein. Ist das Ergebnis dann bei beiden gleich ist die Aussage bewiesen.

b) ▶ **Bestimmen der zwei Werte g_u und g_o** (15P)

Hier ist es deine Aufgabe zwei Werte für g_u und g_o so zu bestimmen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit für alle Werte zwischen g_u und g_o mindestens 90 % der maximalen Wachstumsgeschwindigkeit beträgt und das Intervall zwischen g_u und g_o außerdem möglichst groß ist.

Der maximale Funktionswert der Funktion f_4 entspricht der y-Koordinate des im vorherigen Aufgabenteil berechneten Hochpunkts H_4, also 1. Diese stellt damit auch die maximale Wachstumsgeschwindigkeit dar. Du suchst in der Aufgabe also die beiden Stelle g_u und g_o, für die f_4 den Funktionswert 0,9 annimmt, denn das sind 90 % der maximale Wachstumsgeschwindigkeit. So sind nämlich alle Funktionswerte dazwischen größer als 0,9 und das Intervall ist für die gewünschten Bedingung maximal.

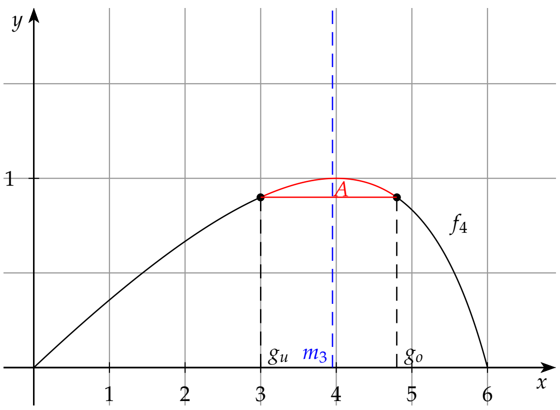


► Bestimmen der Werte für m_1, m_2 und m_3

In diesem Aufgabenteil sollst du die drei Werte m_1, m_2 und m_3 bestimmen. m_1 entspricht dem arithmetischen Mittel von g_u und g_o. Um m_1 zu berechnen musst du also g_u und g_o addieren und dann durch zwei teilen.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{g_u + g_o}{2} \\ &= \frac{(3+4,8)}{2} \\ &= \frac{7,8}{2} \\ &= 3,9 \end{aligned}$$

m_2 soll an der Stelle des Maximums liegen, diese hast du bereits im Aufgabenteil a) bestimmt. Es gilt daher $m_2 = 4$. Um nun noch m_3 zu bestimmen musst du den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen von f_4 und der waagerechten Gerade $y = 0,9$ bestimmen. Dieser soll dann durch eine Senkrechte bei $x = m_3$ halbiert werden.



Den Flächeninhalt A kannst du mit dem Integral über die Funktion f_4 in den Grenzen zwischen g_u und g_o, von dem du dann das Integral von $y = 0,9$ mit den selben Integralgrenzen subtrahierst, bestimmen. Es gilt also:

$$A = \int_{g_u}^{g_o} f_4(x)\ \mathrm{d}x - \int_{g_u}^{g_o} 0,9\ \mathrm{d}x = \int_{g_u}^{g_o} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x$$

Den Flächeninhalt der, durch die Teilung bei m_3 entstehenden, linken Teilfläche kannst du bestimmen indem du die rechte Integralgrenze g_o durch m_3 ersetzt. Außerdem soll die Senkrechte bei m_3 die anfängliche Fläche genau halbieren, der Flächeninhalt der Teilfläche ist also genau halb so groß wie A. Es gilt also:

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\int_{g_u}^{g_o} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x = \int_{g_u}^{m_3} (f_4(x) - 0,9)\ \mathrm{d}x$$

► Vergleichen der Werte für m_1, m_2 und m_3 unter Bezug auf den Sachzusammenhang

In diesem Aufgabenteil sollst du die zuvor ermittelten Werte für m_1, m_2 und m_3 vergleichen und dabei Bezug auf die der Verfahren aus der Aufgabenstellung nehmen. Dabei wird in jedem Verfahren jeweils einer der drei Werte als Richtwert für die Salzkonzentration gewählt. Die Salzkonzentration schwankt dann aus mehreren, unbekannten Gründen um diesen Richtwert und damit auch ihre, durch die Funktion f_4 definierte, Wachstumsgeschwindigkeit. Du sollst nun also begründen welcher der drei Werte besser als Richtwert gedacht ist, wenn es darum geht, dass die Wachstumsgeschwindigkeit trotz der Schwankungen der Salzkonzentration möglichst groß sein soll.
Dafür musst du unterscheiden, um welche Schwankungen es sich handelt.

c) **► Beweis, dass t_2 die Taylorfunktion zweiten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$ ist** (15P)

Hier ist es nun deine Aufgabe zu beweisen, dass die Funktion t_2 die Taylorfunktion zweiten Grades von f_4 an der Stelle $x = 4$ ist. Damit dies der Fall ist müssen die Funktionswerte von t_2 und f_4 und jeweils der ersten beiden Ableitungen dieser, für $x = 4$ übereinstimmen. Die erste und zweite Ableitungen von f_4 sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben. Du musst nun also noch die erste und die zweite Ableitungsfunktion von t_2 mit Hilfe der Potenz und der Kettenregel bestimmen. Setze danach $x = 4$ in die Funktionsterme von t_2, f_4, t_2', f_4', t_2'' und f_4'' ein und überprüfe ob folgende Bedingungen gelten:

- $t_2(4) = f_4(4)$
- $t_2'(4) = f_4'(4)$
- $t_2''(4) = f_4''(4)$

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion von t_2
2. Schritt: Berechnen der benötigten Funktionswerte und Überprüfen der Bedingungen

▶ Ermitteln der Taylorfunktion t_3 dritten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$

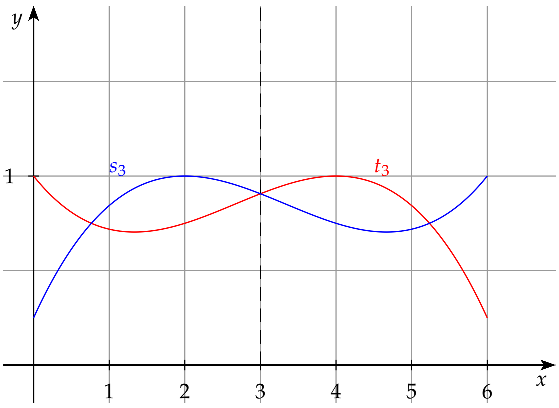
In diesem Aufgabenteil sollst du nun die Taylorfunktion t_3 dritten Grades zu f_4 an der Stelle $x = 4$ mit Hilfe des Funktionsterms von t_2 bestimmen. Für t_3 gilt:

$$t_3(x) = t_2(x) + \frac{f_4'''(4)}{3!} \cdot (x-4)^3$$

Du musst also den Funktionswert der dritten Ableitung von f_4 für $x = 4$ bestimmen und diesen dann zusammen mit t_2 in die Gleichung einsetzen.

▶ Vergleichen der Graphen von t_3 und s_3

Nun sollst du die Graphen von t_3 und s_3 vergleichen und auftretende Gemeinsamkeiten erklären.
Dazu benötigst du jedoch erst einmal die beiden Graphen. Erstellen daher, wie im ersten Aufgabenteil, mit Hilfe des GTR ein Skizze der Graphen von t_3 und s_3.



Dabei fällt auf, dass sich auch hier wieder der Graph von t_3 durch Spiegelung an einer Senkrechten bei $x = 3$ auf den Graphen von s_3 abbilden lässt (und umgekehrt). Der Unterschied der beiden Graphen liegt also darin, dass sie genau spiegelverkehrt verlaufen. Um zu begründen wieso es diesen Unterschied gibt musst du begründen warum hier erneut eine solche Symmetrie vorliegt.

d) **▶ Bestimmen der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$** (10P)

In diesem Aufgabenteil sollst du die maximal mögliche Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$ der Funktionenschar f_k bestimmen. Die Definitionsmenge ist jene Teilmenge einer Grundmenge, deren Elementen x durch die Funktion f_k eindeutig ein Element y der Wertemenge zugeordnet wird. Damit diese maximal ist wählst du als Grundmenge $\mathbb{R}$, die Menge aller reellen Zahlen, und bestimmst dann die Werte, die nicht für x in den Funktionsterm von f_k eingesetzt werden dürfen. Da f_k eine gebrochenrationale Funktion ist sind das die x-Werte, für die der Nenner gleich Null wird, denn durch Null darf nicht geteilt werden. Diese Stellen müssen dann aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

► Bestimmen der Parameter k für die f_k keine zwei Extremstellen besitzt

Hier ist es nun deine Aufgabe alle Werte des Parameters k zu bestimmen für die f_k keine zwei Extremstellen hat. Dafür musst du zunächst einmal alle potentiellen Extremstellen von f_k berechnen. Für eine potentielle Extremstelle bei x_E gilt:

Notwendige Bedingung: $f_k'(x_E) = 0$

Setze also die erste Ableitung von f_k mit Null gleich. Dadurch erhältst du zwei von k abhängige potentielle Extremstellen x_{E_1} und x_{E_2}. Setze diese dann mit einander gleich, denn bei Gleichheit hat f_k so nur eine Extremstelle. Durch das Gleichsetzen kannst du dann die Werte des Parameters k bestimmen für die f_k keine zwei Extremstellen besitzt.
Du gehst also so vor:

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen von f_k
2. Schritt: Gleichsetzen der potentiellen Extremstellen von f_k