1. **► Schnittpunkt mit der y-Achse angeben** (4BE)

Alle Punkte, die auf der y-Achse liegen, haben die x-Koordinate $x = 0$. Bestimme also $f(0)$, um den zugehörigen y-Wert zu ermitteln.
$f(0) = -2 \cdot \sin(-2 \cdot 0) - 1 = -2 \cdot \sin(0) - 1 = -2 \cdot 0 - 1 = -1.$
Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt $S\,(0 \mid -1)$.

► Definitionsmenge und Wertemenge von f angeben

Die Sinus-Funktion selbst ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Das gleiche gilt auch für unsere Funktion f: $D = \mathbb{R}$.

Nun zur Wertemenge. Der „normale" Sinus bewegt sich zwischen -1 und 1. In unserem Fall ist die Kurve jedoch um den Faktor 2 gestreckt. Außerdem ist sie um eine LE nach **unten verschoben**.
Damit bewegt sich der Graph unserer Funktion zwischen $(-1) + 2$ und $(-1) - 2$ hin und her, d.h. zwischen -3 und 1: $W = [-3; 1]$.

2. **► Graphen der Ableitungsfunktion identifizieren und begründen** (10BE)

Hier gilt es, den Zusammenhang zwischen dem Graph von f und dem Graphen von f' zu sehen. Überlege zunächst, welche Eigenschaften der Graph von f' aufweisen muss:

1. An den Extremstellen von f muss f' Nullstellen aufweisen
2. Der Graph von f' muss unterhalb der x-Achse verlaufen, wenn der Graph von f fällt und oberhalb der x-Achse, wenn der Graph von f steigt
3. An den Wendestellen von f muss f' Extremstellen aufweisen.

Im gezeigten Intervall muss der Graph von f' also insgesamt **vier** Nullstellen und **fünf** Extrema aufweisen. Weiterhin muss er im Intervall $[-4; \approx -2,3]$ unterhalb der x-Achse verlaufen und im Intervall $[\approx -2,3; \approx -0,8]$ oberhalb der x-Achse.
All diese Eigenschaften werden nur vom Graphen in (I) erfüllt. Also stellt der Graph von (I) die Ableitungsfunktion f' dar.

3. **► Aussagen begründen oder widerlegen** (8BE)

1. Schritt: Aussage (A1)

Die Stammfunktion F hat an den Stellen Extremstellen, wo f **Nullstellen** besitzt.
Betrachte den Graphen von f im Intervall $[3; 3]$. Es ist im Material 1 gegeben. Die Aussage (A1) ist wahr, wenn f diesem Intervall genau **vier** Nullstellen besitzt. Im Graph kannst du sehen, dass dies tatsächlich der Fall ist.
Damit ist Aussage (A1) wahr und begründet.

2. Schritt: Aussage (A2)

Aussage (A2) sagt aus: Das Integral im Bereich von $x = -3$ bis „Unendlich" besitzt keinen festen Grenzwert, sondern läuft gegen $-\infty$.
Betrachte auch hier den Graphen von f:

Flächen, die unterhalb der x-Achse vom Graphen eingeschlossen werden, nehmen einen **negativen Integralwert** an. Flächen, die oberhalb der x-Achse eingeschlossen werden, einen **positiven**.

Wird über eine Nullstelle hinweg integriert, so addieren sich die positiven und negativen Werte, die das Integral annimmt.

Es wird angenommen, dass f mit der gleichen Periodizität weiterläuft wie in diesem Intervall. Damit wiederholen sich auch die eingeschlossenen Flächenstücke.

Die Flächenstücke, die **unterhalb der x-Achse** liegen, sind um einiges **größer** als die Flächenstücke, die oberhalb der x-Achse liegen. Je weiter von $x = -3$ aus integriert wird, desto „negativer" wird der Wert, den das Integral angibt. Für $a \to \infty$ läuft das Integral also in der Tat gegen $-\infty$.

Auch diese Aussage (A2) ist wahr und begründet.

4.1 ► **Stammfunktion nachweisen** (10BE)

Leite $G(x)$ ab und zeige, dass $G'(x) = g(x)$.

$$G'(x) = -\sin(2x) \cdot 2 = -2\sin(2x) = g(x)$$

Damit ist die Stammfunktion nachgewiesen.

► **Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen**

Bei dieser recht einfach klingenden Fragestellung ist Vorsicht geboten: Der Graph von g verläuft **periodisch**, d.h. er schneidet immer wieder die x-Achse. Wenn der Inhalt einer Fläche berechnet werden soll, so darf **nicht** über eine Nullstelle hinweg integriert werden.

Betrachte den Graphen von g zunächst im GTR und prüfe, ob Nullstellen im Intervall $[0; \frac{3}{4}\pi]$ vorliegen.

1. Schritt: Nullstellen im Intervall ermitteln

Setze $g(x) = 0$:

$$\begin{aligned} g(x) = -2\sin(2x) &= 0 \quad |:(-2) \\ \sin(2x) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird durch **Substitution** gelöst. Überlege zunächst, wann der **Sinus** den Wert Null annimmt. Dies tut er bei **allen ganzzahligen Vielfachen von** π, d.h. bei $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

Damit also $\sin(2x) = 0$ wird, muss das **Argument des Sinus** $(2x)$ eben einen Wert $k \cdot \pi$ annehmen. Die Lösung unserer Gleichung muss zwischen $x = 0$ und $x = \frac{3}{4}\pi$ liegen. Prüfe also für $k = 1$ und $k = 2$.

$$k = 1: \quad 2x = 1 \cdot \pi \quad |:2 \qquad\qquad k = 2: \quad 2x = 2 \cdot \pi \quad |:2$$

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad\qquad x = \pi$$

Da nur $x = \frac{\pi}{2}$ im Intervall liegt, findest du nur eine Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{2}$.

Zerlege die eingeschlossene Fläche also in zwei **Teilflächen** A_1 und A_2:

- A_1 wird im Bereich $[0; \frac{\pi}{2}]$ eingeschlossen und liegt **unterhalb** der x-Achse
- A_2 wird im Bereich $[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi]$ eingeschlossen und liegt **oberhalb** der x-Achse

Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Flächen mit dem **Hauptsatz der Integralrechnung**.

2. Schritt: A_1 berechnen

Beachte, dass A_1 **unterhalb** der x-Achse liegt. Rechne also mit dem **Betrag**, um eine positive Flächenmaßzahl zu erhalten.

$$\begin{aligned} A_1 &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x))\, dx \right| = \left| [G(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| \\ &= \left| G\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - G(0) \right| = \left| \cos\left(2 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) - \cos(2 \cdot 0) \right| \\ &= |\cos(\pi) - \cos(0) = (-1) - 1| = |-2| = 2 \end{aligned}$$

3. Schritt: A_2 berechnen

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (g(x))\, dx = [G(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= G\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) - \left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \tfrac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(2 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) - \cos(\pi) = 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

Die gesamte eingeschlossene Fläche A setzt sich zusammen aus A_1 und A_2. Damit gilt für den Inhalt von A: $A = A_1 + A_2 = 2 + 1 = 3$.

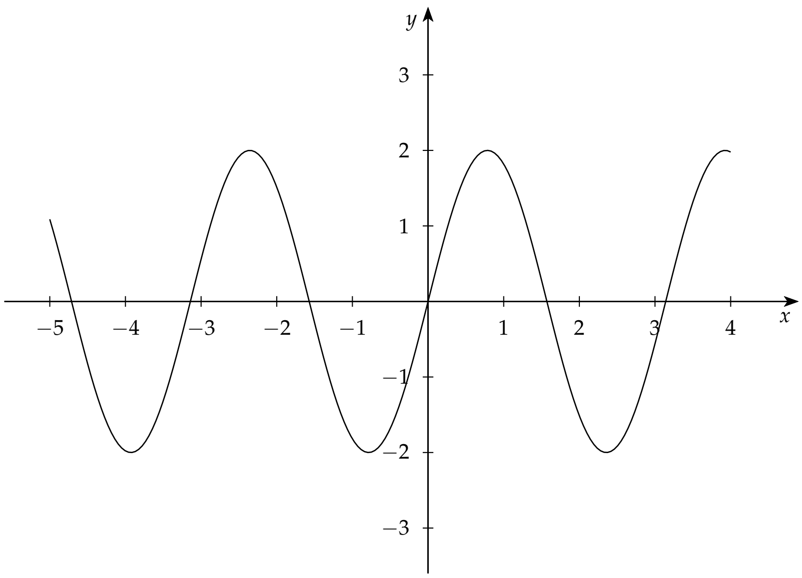
Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt 3 FE.

4.2 ► **Entscheiden, ob das Integral Null werden kann** (5BE)

Zunächst ist es wichtig, zu verstehen, wann ein Integral den Wert Null annimmt: Eine Fläche, die **unterhalb** der x-Achse von einem Graphen und der x-Achse eingeschlossen ist, bekommt vom Integral einen **negativen Wert zugeordnet**. Eine Fläche, die hingegen **oberhalb** der x-Achse verläuft, bekommt einen **positiven Wert zugeordnet.**

Werden die Grenzen eines Integrals nun so gewählt, dass im Intervall $[a_1; a_2]$ die Flächen oberhalb und die Flächen unterhalb der x-Achse **genau gleich groß sind**, so nimmt das Integral den Wert Null an.

Mache also eine Skizze des Graphen von g (doppelter Sinus mit halber Periode):



Es fällt auf, dass die Flächen, die zwischen zwei Nullstellen **oberhalb** der x-Achse eingeschlossen sind und **unterhalb** der x-Achse eingeschlossen sind, genau gleich groß sind.

Werden also als Integrationsgrenzen a_1 und a_2 **nicht direkt** aufeinander folgende, sondern z.B. die erste und die dritte Nullstelle oder die zweite und die vierte Nullstelle etc. gewählt, so nimmt das Integral den Wert Null an.