a) **► Wendepunkt W(2|2) nachweisen** (11P)

Laut Aufgabenstellung besitzt Funktion f folgenden Funktionsterm:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

Damit ein bestimmter Punkt Wendepunkt des Graphen von f ist, müssen an der zugehörigen Stelle drei Bedingungen erfüllt sein:

Zum einen muss der Punkt auf dem Graphen von f liegen und zum anderen müssen die notwendige und die hinreichende Bedingung erfüllt sein.

Die **notwendige Bedingung** für einen Wendepunkt ist, dass die zweite Ableitung von f an der betrachteten Stelle gleich Null ist:

$$\boldsymbol{f''(x) = 0}$$

Damit zusätzlich auch die **hinreichende Bedingung** für einen Wendepunktes erfüllt ist, muss die dritte Ableitung von f an der betrachteten Stelle ungleich Null sein:

$$\boldsymbol{f'''(x) \neq 0}$$

Damit die **notwendige Bedingung** an der Stelle $x_W = 2$ des Wendepunktes erfüllt ist, muss also gelten:

$$\boldsymbol{f''(2) = 0}$$

Darüber hinaus muss diese x-Koordinate von W auch die **hinreichende Bedingung** erfüllen. Nur wenn die Wendestelle $x_W = 2$ beide Bedingungen erfüllt, bezeichnet die x-Koordinate eine Wendestelle der Funktion f.

1. Schritt: Funktion f ableiten

Da du für die hinreichende Bedingung die dritte Ableitung benötigst, leite also zu Beginn die Funktion f dreimal ab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{6}{4}x \\ &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f''(x) &= -\frac{6}{8}x + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad f'''(x) = -\frac{3}{4}$$

2. Schritt: Zeigen, dass der Graph von f durch den Punkt W verläuft

Zu zeigen ist, dass die Funktion f an der Stelle $x_W = 2$ einen Funktionswert von 2 annimmt und damit also der zugehörige Graph durch den Punkt W verläuft.
Hierfür ist zu zeigen:

$$f(2) = 2$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8}\cdot x^3+\frac{3}{4}\cdot x^2 && \mid x_W = 2 \text{ einsetzen}\\ f(2) &= -\frac{1}{8}\cdot 2^3+\frac{3}{4}\cdot 2^2 \\ &= -\frac{1}{\cancel{8}}\cdot\cancel{8}+\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4} \\ &= -1+3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. Schritt: Notwendige und hinreichende Bedingung für W überprüfen

Da der Punkt W$(2|2)$ ein potentieller Wendepunkt ist, setzt du die x-Koordinate $x_W = 2$ in die notwendige Bedingung ein:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{3}{4}\cdot x+\frac{3}{2} && \mid x_W = 2 \text{ einsetzen}\\ f''(2) &= -\frac{3}{4}\cdot 2+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{2}+\frac{3}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die **notwendige Bedingung** ist für eine Wendestelle bei $x_W = 2$ erfüllt.
Da die dritte Ableitung eine Parallele zur x-Achse darstellt, ist ebenfalls die **hinreichende Bedingung** für einen Wendepunkt bei $x_W = 2$ erfüllt:

$$f'''(2) = -\frac{3}{4} \neq 0$$

Der Punkt W$(2|2)$ ist also ein Punkt auf dem Graphen der Funktion von f und erfüllt die notwendige sowie die hinreichende Bedingung.

W$(2|2)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von f.

▶ Steigung des Graphen an den Stellen $x = -2$ und $x = 6$, sowie im Punkt W bestimmen

Die Ableitungsfunktion f' beschreibt die Steigung des Graphen von f.
Um also die Steigung des Graphen von f an den Stellen $x = -2$ und $x = 6$, sowie im Wendepunkt W zu bestimmen, setzt du die Stellen in den Funktionsterm $f'(x)$ der Ableitungsfunktion f' ein:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{8}\cdot x^2+\frac{3}{2}\cdot x && \mid x = -2 \text{ einsetzen}\\ f'(-2) &= -\frac{3}{8}\cdot(-2)^2+\frac{3}{\cancel{2}}\cdot(-\cancel{2}) \\ &= -\frac{3}{8}\cdot 4-3 \\ &= -\frac{3}{2}-3 \\ &= -4,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{8}\cdot x^2+\frac{3}{2}\cdot x && \mid x = 6 \text{ einsetzen}\\ f'(6) &= -\frac{3}{8}\cdot 6^2+\frac{3}{2}\cdot 6 \\ &= -\frac{3}{8}\cdot 36-\frac{18}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\cdot 9-9 \\ &= -4,5 \end{aligned}$$

Der Wendepunkt W$(2|2)$ befindet sich an der Stelle $x_W = 2$:

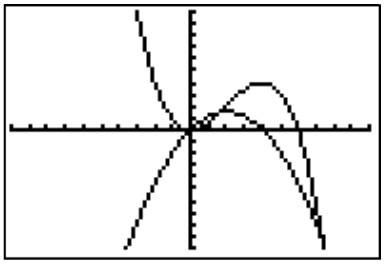
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{8}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x \qquad \mid x_W = 2 \text{ einsetzen} \\ f'(2) &= -\frac{3}{8}\cdot 2^2 + \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} \\ &= -\frac{3}{2\cdot\cancel{4}}\cdot\cancel{4} + 3 \\ &= -\frac{3}{2} + 3 \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

An den Stellen $x = -2$ und $x = 6$ besitzt der Graph von f eine Steigung von $-4,5$ und im Wendepunkt W eine Steigung von $1,5$.

▶ Begründen, dass im Punkt W die größte Steigung vorliegt

Die erste Ableitung f' beschreibt die Steigung des Graphen von f.
An der Stelle des globalen Maximums des Graphen von f' liegt daher die größte Steigung des Graphen von f vor.
Den Sachverhalt kannst du dir mit Hilfe der beiden Graphen verdeutlichen:

Gib hierfür die Funktionsterme $f(x)$ und $f'(x)$ in den $\boxed{\texttt{Y=}}$ - Editor deines GTR ein.



An Hand der vom GTR gezeichneten Graphen kannst du erkennen, dass an der Wendestelle von f ein Hochpunkt des Graphen von f' vorliegt.

Der Funktionsterm der Ableitung f' ist ein Polynom zweiten Grades, also eine Parabel:

$$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

Diese ist nach unten geöffnet und besitzt daher einen Hochpunkt als einziges globales Maximum. Dieser Hochpunkt befindet sich an derselben Stelle wie der Wendepunkt von f.
Daher liegt im Wendepunkt des Graphen von f die größte Steigung vor.

b) **▶ Stammfunktion von f aufstellen** (14P)

Eine Stammfunktion stellst du mit Hilfe der Integrationsregeln auf.
Die Funktion f ist wie oben definiert:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

Eine Stammfunktion F von f ergibt sich nach der Potenzregel der Integration:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{8\cdot 4}\cdot x^4 + \frac{\cancel{3}}{4\cdot\cancel{3}}\cdot x^3 + C \\ &= -\frac{1}{32}\cdot x^4 + \frac{1}{4}\cdot x^3 + C \end{aligned}$$

▶ Gerade g in das Koordinatensystem einzeichnen

Gegeben ist eine Gerade g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, welche den Graphen der Funktion f in drei Punkten schneidet.

Vergleichst du den Funktionsterm von g mit der allgemeinen Geradengleichung $y = m\cdot x + c$, so kannst du die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c ablesen:

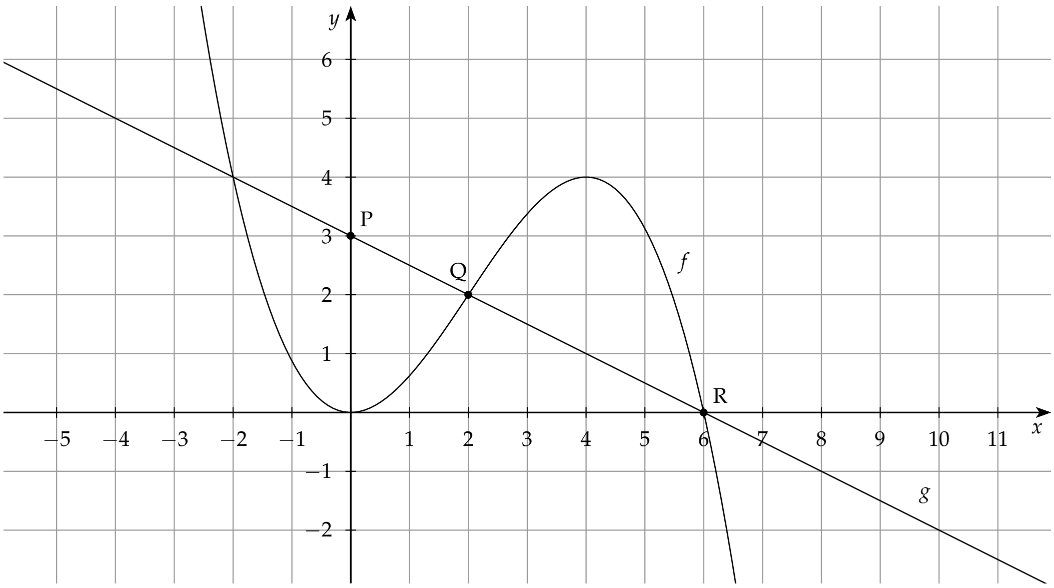
$$m = -\frac{1}{2} \qquad\qquad c = 3$$

Diese helfen dir wiederum beim Einzeichnen der Gerade.
Den y-Achsenabschnitt kannst du direkt an der y-Achse einzeichnen:
Du erhältst also den Punkt $\mathrm{P}(3|0)$.

Die Steigung von g ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$

Um also einen weiteren Punkt zu erhalten, gehst du um die Zahl im Nenner der Steigung in x - Richtung, also um 2 nach rechts und um die Zahl im Zähler in y - Richtung, also um 1 nach unten, da eine negative Steigung vorliegt.
Du gelangst also an den Punkt $\mathrm{Q}(2|2)$.

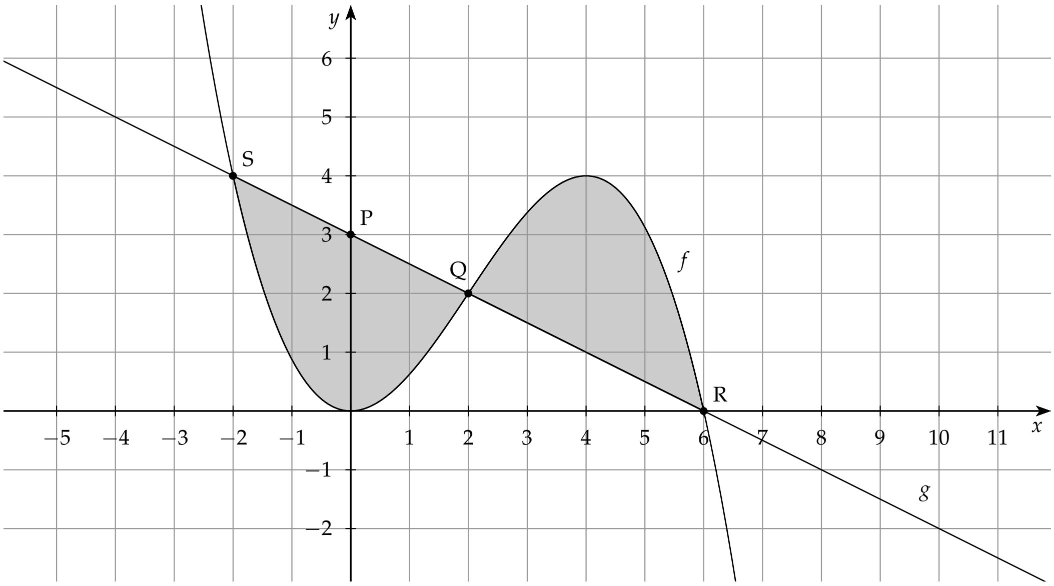
Nun hast du zwei Punkte gefunden und kannst durch diese eine Gerade einzeichnen.



Wie du erkennen kannst, ergibt sich automatisch der dritte Schnittpunkt $\mathrm{R}(6|0)$.

► Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche bestimmen

Die Gerade g und der Graph der Funktion f umschließen gemeinsam eine Fläche die aus zwei Flächenstücken besteht:



Der gesamte Flächeninhalt A dieser grau markierten Fläche berechnet sich über die Addition der Flächeninhalte der beiden einzelnen Flächenstücke.

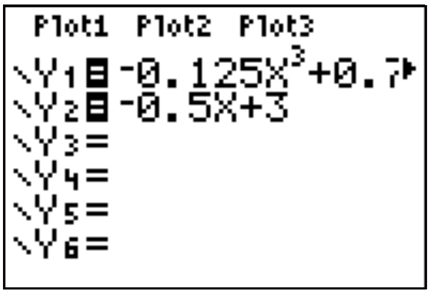
Diese Flächeninhalte kannst du wiederum über Integrale berechnen.
Um hierbei positive Flächeninhalte zu erhalten, ziehst du die Funktion, deren Graph unterhalb des Graphen der anderen Funktion liegt, von der darüber liegenden ab und integrierst schließlich über diese Differenz.
Beachte hierbei, dass bei der linken Fläche der Graph von g über dem Graphen von f liegt. Bei der rechten Fläche ist dies gerade umgekehrt.
Die Schnittpunkte der Graphen von f mit g $S(-2|4)$, $Q(2|2)$ und $R(6|0)$ bezeichnen die Integrationsgrenzen.
Du integrierst also zwischen $x = -2$ und $x = 2$, sowie zwischen $x = 2$ und $x = 6$.

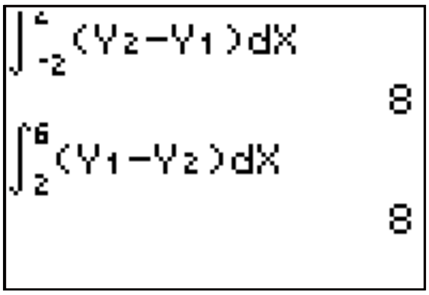
Es ergibt sich also:

$$A = \underbrace{\int_{-2}^{2} (\, g(x) - f(x)\,)\ \mathrm{d}x}_{\text{linke Fläche}} + \underbrace{\int_{2}^{6} (\, f(x) - g(x)\,)\ \mathrm{d}x}_{\text{rechte Fläche}}$$

Mit Hilfe des GTR lassen sich die beiden Integrale berechnen.

Gib hierfür f z.B. als `Y1` und g als `Y2` in den `Y=`-Editor deines GTR ein.
Im `MATH`-Menü findest du anschließend die Funktion `9: fnInt(`. Hier gibst du die Grenzen, die beiden Funktionen und die Integrationsvariable dx ein und kannst das Integral berechnen.
Die Funktionen erreichst du dabei über folgende Tastenkombination:
`VARS → Y-VARS → 1: Function → 1: Y1`.





Wie du erkennen kannst, sind beide Flächenstücke mit 8 FE gleich groß.
Die Summe aus den Flächeninhalten beider Flächenstücke ergibt schließlich den Flächeninhalt der gesamten eingeschlossenen Fläche:

$A = 2 \cdot 8 = 16$

Alternativ: Integralrechnung über den Betrag

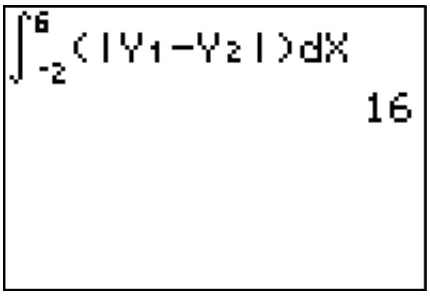
Du kannst diese Berechnung auch mit einem einzigen Schritt durchführen:

$$A = \int_{-2}^{6} |\, f(x) - g(x) \,| \; \mathrm{d}x$$

Hierbei ist es egal, welche Funktion du von welcher abziehst, da der Betrag dafür sorgt, dass der Flächeninhalt der Fläche zwischen den Funktionen immer positiv ist.

Den Betrag findest du im `MATH` - Menü in der `NUM` - Spalte unter `1: abs(` .

Im GTR sieht die Berechnung dann folgendermaßen aus:



Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt 16 FE.

▶ Interpretieren der Gleichung

Berechnest du den gesamten Flächeninhalt auf einmal ohne den Betrag zu nutzen, so erhältst du folgende Rechnung:

$$A = \int_{-2}^{6} (\, f(x) - g(x) \,) \; \mathrm{d}x = 0$$

Wie du aus deiner obigen Berechnung schon folgern kannst, ist die Fläche zwischen den Funktionen nicht Null, sondern besteht aus zwei gleich großen Flächen.
Dieses Ergebnis kommt nun daher, dass die linke Fläche mit einem negativen Flächeninhalt in die Berechnung eingeht, da die obere von der unteren Funktion abgezogen wird.

c) ▶ **Bestimmen der Gleichung der Ortslinie, auf der alle Wendepunkte liegen** (11P)

Laut Aufgabenstellung ist die folgende Funktionenschar f_k mit diesem Funktionsterm gegeben:

$$f_k(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3\cdot k}{8}x^2; \quad k > 0$$

Wie bereits in Teilaufgabe a) beschrieben, muss für Wendepunkte des Graphen von f_k an der zugehörigen Stelle die **notwendige Bedingung** $\boldsymbol{f_k''(x) = 0}$, sowie die **hinreichende Bedingung** $\boldsymbol{f_k'''(x) \neq 0}$ gelten.
Solltest du Wendestellen finden, so erhältst du alle Wendepunkte in Abhängigkeit von k indem du diese Stellen in die Funktionenschar f_k einsetzt.

Die Gleichung der Ortslinie lässt sich schließlich dadurch bestimmen, dass eine Koordinate des Wendepunktes nach dem Parameter k aufgelöst wird und in die entsprechend andere Koordinate für k eingesetzt wird.
Du erhältst also schließlich eine Beziehung zwischen x und y, welche die Ortslinie darstellt.

1. Schritt: Funktionenschar ableiten

Zu Beginn leite die Funktionsschar also dreimal ab, wobei der Parameter k mitgeführt wird. Wichtig ist hierbei, dass du dir klar machst, dass nach x und nicht nach k abgeleitet wird. Zur Hilfe kannst du dir k beispielsweise als irgendeine positive reelle Zahl vorstellen.

Für alle $k > 0$ gilt somit:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{6\cdot k}{8}x \\ &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3\cdot k}{4}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= -\frac{6}{8}x + \frac{3\cdot k}{4} \\ &= -\frac{3}{4}x + \frac{3\cdot k}{4} \end{aligned}$$

$$f_k'''(x) = -\frac{3}{4}$$

2. Schritt: Notwendige und hinreichende Bedingung überprüfen

Alle Wendestellen müssen nun die notwendige Bedingung $f_k''(x) = 0$ erfüllen.
Es folgt also für alle $k > 0$:

$$\begin{aligned} f_k''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3\cdot k}{4} &\stackrel{!}{=} 0 \\ -\frac{3}{4}(x-k) &= 0 \qquad \left|:\left(-\frac{3}{4}\right)\right. \\ (x-k) &= 0 \qquad |\ +k \\ x &= k \end{aligned}$$

Da die dritte Ableitung $f_k'''(x) = -\frac{3}{4}$ immer ungleich Null ist, liegen an allen Stellen, wo $x = k > 0$ gilt, Wendestellen vor.

3. Schritt: Koordinaten der Wendepunkte bestimmen

Die y-Koordinaten der Wendepunkte erhältst du nun durch Einsetzen von $x = k$ in die Funktionenschar f_k:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3\cdot k}{8}x^2\,;\; k>0 \qquad \mid x=k \text{ einsetzen} \\ f_k(k) &= -\frac{1}{8}k^3 + \frac{3\cdot k}{8}k^2 \\ &= -\frac{1}{8}k^3 + \frac{3}{8}k^3 \\ &= \frac{1}{4}k^3 \end{aligned}$$

Für alle Wendepunkte gilt also: $W_k\left(\underbrace{k}_{=x} \mid \underbrace{\frac{1}{4}k^3}_{=y}\right)$

Um den Funktionsterm der Ortslinie zu erhalten, setzt du nun $x = k$ mit $k > 0$ aus der x-Koordinate in die y-Koordinate ein:

$$x = k \quad \overset{\text{einsetzen}}{\Longrightarrow} \quad y = \frac{1}{4}k^3 \quad k > 0$$

Die Ortslinie aller Wendepunkte der Funktionenschar f_k lautet:

$$y(x) = \frac{1}{4}x^3\,; \quad x > 0$$

► **Untersuchen, ob die Aussage richtig ist**

Laut Aufgabenstellung ist die Steigung der Ortslinie y im Wendepunkt W_k doppelt so groß wie die Steigung des Graphen der Funktionenschar f_k.

Da die ersten Ableitungen f'_k und y' der Funktionen die Steigung ihrer Graphen beschreiben, setzt du die x - Koordinate $x = k$ der Wendepunkte in die Funktionsterme dieser Ableitungen ein.
Damit die Aussage gültig ist, muss anschließend gelten:

$$y'(k) = 2 \cdot f'_k(k)$$

Die Ableitung des Funktionsterms der Funktionenschar hast du bereits berechnet:

$$f'_k(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3\cdot k}{4}x\,; \quad k > 0 \quad \text{(siehe oben)}$$

Die Ableitung des Funktionsterms der Ortslinie berechnet sich mit Hilfe der Potenzregel:

$$y'(x) = \frac{3}{4}x^2\,; \quad x > 0$$

Die Steigung von f_k ist somit an der Stelle $x = k$:

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3\cdot k}{4}x\,;\; k>0 \qquad \mid x=k \text{ einsetzen} \\ f'_k(k) &= -\frac{3}{8}k^2 + \frac{3\cdot k}{4}k\,;\; k>0 \\ &= -\frac{3}{8}k^2 + \frac{3}{4}k^2 \\ &= -\frac{3}{8}k^2 + \frac{3}{4}k^2 \\ &= \frac{3}{8}k^2 \end{aligned}$$

Die Steigung des Graphen von y hingegen ist an der Stelle $x = k$:

$$y'(x) = \frac{3}{4}x^2; \quad x > 0 \qquad | \ x = k \text{ einsetzen}$$
$$y'(k) = \frac{3}{4}k^2; \quad k > 0$$
$$= 2 \cdot \frac{3}{8}k^2$$
$$= 2 \cdot f_k'(k)$$

Die Steigung des Graphen der Ortslinie der Wendepunkt ist wirklich doppelt so groß wie die Steigung des Graphen von f_k.

d) ► **Aussage untersuchen** (9P)

Untersucht werden soll, ob eine Gerade durch den Ursprung und den Wendepunkt der Funktionenschar ebenfalls durch den Hochpunkt der Funktionenschar im 1. Quadranten verläuft.

Zuerst stellst du hierfür die Gleichung der Gerade durch den Ursprung und den Wendepunkt der Funktionenschar auf. Hierfür setzt du die Koordinaten des Wendepunktes in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ ein.
Anschließend berechnest du die Stelle, an der sich der Hochpunkt der Funktionenschar befindet. An diesen Stellen muss die **notwendige Bedingung $f_k'(x) = 0$** und die **hinreichende Bedingung $f_k''(x) \neq 0$** gelten.
Zum Schluss berechnest du noch die y-Koordinate des Hochpunktes und prüfst nach, ob dieser auf der Ursprungsgeraden liegt.

1. Schritt: Gleichung der Ursprungsgeraden aufstellen

Die Steigung der Ursprungsgerade durch den Wendepunkt $W_k\left(k \mid \frac{1}{4}k^3\right)$ erhältst du, indem du die Koordinaten dieses Punktes in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ einsetzt. Da es sich um eine Ursprungsgerade handelt ist $c = 0$.

$$y = m \cdot x \qquad | \ W_k\left(k \mid \frac{1}{4}k^3\right) \text{ einsetzen}$$
$$\frac{1}{4}k^3 = m \cdot k \qquad | : k \text{ weil } k > 0$$
$$\frac{1}{4}k^2 = m$$

Da eine Division durch Null mathematisch nicht definiert ist, musst du beachten, dass die Umformung nur gültig ist, wenn $k > 0$ und damit ungleich Null ist.
Somit ergibt sich als Gleichung der Ursprungsgeraden:

$$g(x) = m \cdot x \qquad | \ m \text{ einsetzen}$$
$$g(x) = \frac{1}{4}k^2 \cdot x$$

2. Schritt: x-Koordinate des Hochpunktes bestimmen

Die **notwendige Bedingung** für eine Maximalstelle x_H der Funktionenschar f_k ist:

$$\boldsymbol{f_k'(x) = 0}$$

Sie ist an folgenden Stellen erfüllt:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3\cdot k}{4}x \overset{!}{=} 0 \qquad | -x \text{ ausklammern} \\ -x\left(\frac{3}{8}x - \frac{3\cdot k}{4}\right) &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nach dem Satz vom Nullprodukt genau dann erfüllt, wenn $x_1 = 0$ oder $\frac{3}{8}x_2 - \frac{3\cdot k}{4} = 0$ ist.

Für x_2 kannst du berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}x_2 - \frac{3\cdot k}{4} &= 0 \qquad \left| +\frac{3\cdot k}{4}\right. \\ \frac{3}{8}x_2 &= \frac{3\cdot k}{4} \qquad \left| \cdot\frac{8}{3}\right. \\ x_2 &= \frac{\cancel{3}\cdot k}{4}\cdot\frac{8}{\cancel{3}} \\ &= 2\cdot k \end{aligned}$$

Die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\,k$ sind also potentielle Extremstellen.

Erfüllen diese Stellen auch noch die **hinreichende Bedingung $f_k''(x) \neq 0$**, so sind sie die Extremstellen der Funktionenschar f_k.

Aus Teilaufgabe c) ist bereits der Funktionsterm der zweiten Ableitung bekannt:

$$f_k''(x) = -\frac{6}{8}x + \frac{3\cdot k}{4}$$

In diesen setzt du nun die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\,k$ ein:

$$\begin{aligned} f_k''(0) &= -\frac{6}{8}\cdot 0 + \frac{3\cdot k}{4} \\ &= \frac{3}{4}k \quad > 0; \quad \text{da } k > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k''(2\,k) &= -\frac{6}{8}\cdot 2\,k + \frac{3\cdot k}{4} \\ &= -\frac{6}{4}k + \frac{3\cdot k}{4} \\ &= -\frac{3}{4}k \quad < 0; \quad \text{da } k > 0 \end{aligned}$$

Da $f_k''(0) > 0$ gilt, besitzt der Graph von f_k an der Stelle x_1 ein Tiefpunkt und bei $x_2 = x_H$ einen **Hochpunkt**, da $f_k''(2\,k) < 0$.

3. Schritt: Koordinaten des Hochpunktes bestimmen

Die Koordinaten des Hochpunktes kannst du nun bestimmen, indem du die Stelle x_H in die Funktionenschar f_k einsetzt:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3\cdot k}{8}x^2; \qquad k > 0 \qquad | \; x_H \text{ einsetzen} \\ f_k(2\,k) &= -\frac{1}{8}(2\,k)^3 + \frac{3\cdot k}{8}(2\,k)^2;\; k > 0 \\ &= -\frac{8}{8}k^3 + \frac{3\cdot 4}{8}k^3; \\ &= -k^3 + \frac{3}{2}k^3; \\ &= \frac{1}{2}k^3; \end{aligned}$$

Der Hochpunkt besitzt also die Koordinaten $H_k\left(2\,k \,\middle|\, \frac{1}{2}k^3\right)$.

4. Schritt: Prüfen, ob der Hochpunkt auf Ursprungsgeraden liegt

Nun bleibt noch zu prüfen, ob H_k auf der Ursprungsgeraden g liegt.
Hierfür muss gelten:

$$g(2k) = \frac{1}{2}k^3$$

Dies ist der Fall, denn es ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{4}k^2 \cdot x && \mid x_H = 2k \text{ einsetzen} \\ g(2k) &= \frac{1}{4}k^2 \cdot 2k \\ &= \frac{1}{2}k^3 \end{aligned}$$

Die Ursprungsgerade durch den Wendepunkt der Funktionenschar verläuft ebenfalls durch den Hochpunkt der Funktionenschar im 1. Quadranten.