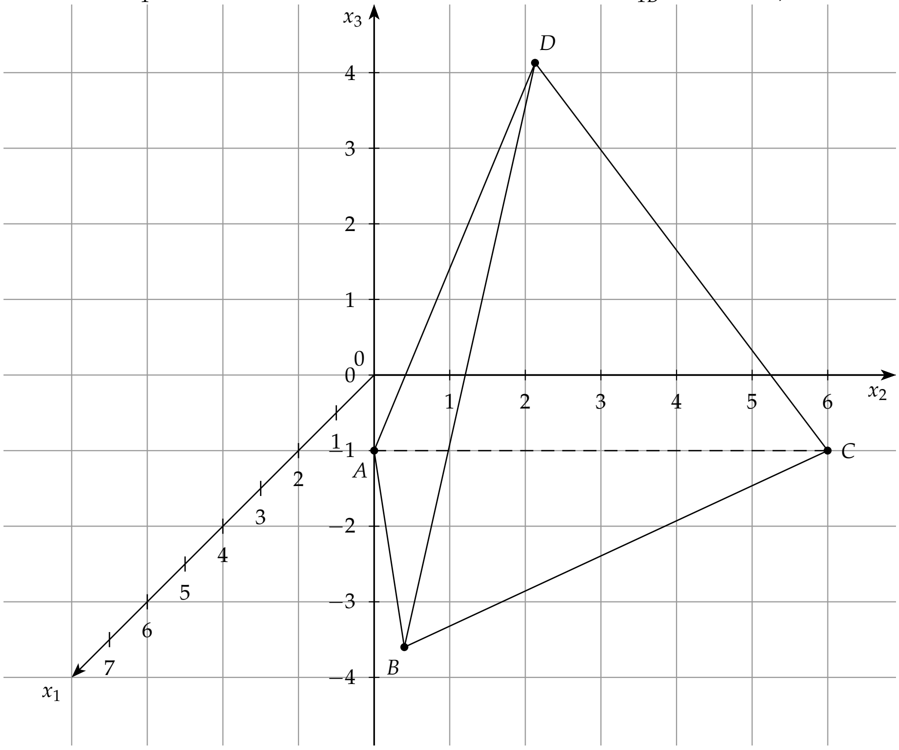
2.1 ▶ Schaubild der Pyramide (3P)

Zeichne die Punkte in ein kartesischer Koordinatensystem,Näherungswerte für die x_1Koordinaten bei B und D sind $x_{1B} = 1{,}7$ und $x_{1D} = 5{,}2$.



2.2 ▶ Nachweis, dass die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen hat (3P)

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn seine Schenkel gleich lang sind. Die Pyramide hat die drei Dreiecke $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ und $\triangle CAD$ als Seitenflächen, die sich die Schenkel AD, BD und CD teilen. Sind diese jeweils gleich lang, so stellen die Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke dar.

Die Länge der Schenkel wird durch den Abstand ihrer Endpunkte bestimmt. Allgemein gilt für den Abstand zweier Punkte $X(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$ und $Y(y_1\,|\,y_2\,|\,y_3)$:

$$\overline{XY} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

Bestimme die Längen der Schenkel AD, BD und CD:

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-0)^2 + (5-(-1))^2}\\ &= \sqrt{3+9+36}\\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \sqrt{(\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2 + (3-3)^2 + (5-(-1))^2} \qquad |\sqrt{3}-3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}\\ &= \sqrt{12+0+36}\\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-6)^2 + (5-(-1))^2}\\ &= \sqrt{3+9+36}\\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Die Schenkel der Dreiecke sind gleich lang. Somit hat die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen.

2.3 **► Bestimmung des Volumens der Pyramide** (4P)

Die gegebene Pyramide hat das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ zur Grundfläche und ihre Seitenkanten sind (wie zuvor gezeigt) gleich lang. Somit handelt es sich hierbei um eine gerade Pyramide. Das Volumen einer Pyramide berechnet sich über den Inhalt der Grundfläche G und die Höhe der Pyramide h durch folgende Formel:

$V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

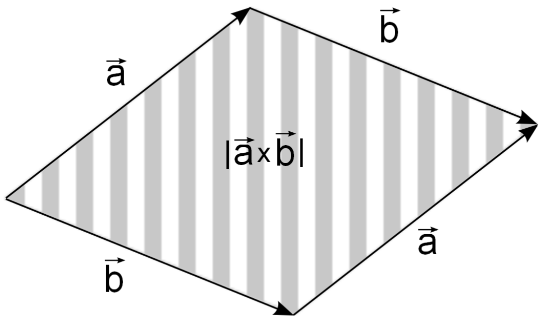
Bestimme nun G und h in zwei Arbeitsschritten:

1. Schritt: Bestimmung von *G* über das Vektorprodukt

Der Inhalt der Grundfläche G ist durch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gegeben. Diesen kann man mithilfe des Vektorprodukts (**Lösungsweg A**) oder über die Flächeninhaltsformel (**Lösungsweg B**) bestimmen.

►► Lösungsweg A

Es gilt: Der Betrag des Vektorprodukts zweier Vektoren ergibt den Flächeninhalt des zugehörigen Parallelogramms:



Nehmen wir die zwei Vektoren der Grundfläche $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Der Betrag des Vektorprodukts ergibt den Flächeninhalt eines Parallelogramms. Dieser Flächeninhalt ist dann gerade doppelt so groß, wie der Inhalt des Dreiecks ABC. Für den Inhalt der Grundfläche G gilt somit:

$G = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind Verbindungsvektoren der Endpunkte der jeweiligen Strecke:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} - 0 \\ 3 - 0 \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 6 - 0 \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Inhalt der Grundfläche folgt daraus:

$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$

Das Vektorprodukt ergibt den Normalenvektor:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 0 - 3\sqrt{3} \cdot 0 \\ 3\sqrt{3} \cdot 6 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses in die Gleichung für den Grundflächeninhalt erhältst du:

$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|$ Bestimme nun den Betrag des Normalenvektors:

$G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (18\sqrt{3})^2}$
$G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(18\sqrt{3})^2}$
$G = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Der Inhalt der Grundfläche beträgt $9\sqrt{3}$ FE.

►► Lösungsweg B

Die Grundfläche ABC bildet ein gleichseitiges Dreieck. Die Flächeninhaltsformel eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a lautet:

$G = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

Die Seitenlänge des Dreiecks ABC lässt sich durch den Betrag eines der bereits bekannten Vektoren bestimmen, etwa $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{27 + 9 + 0} = \sqrt{36} = 6$$

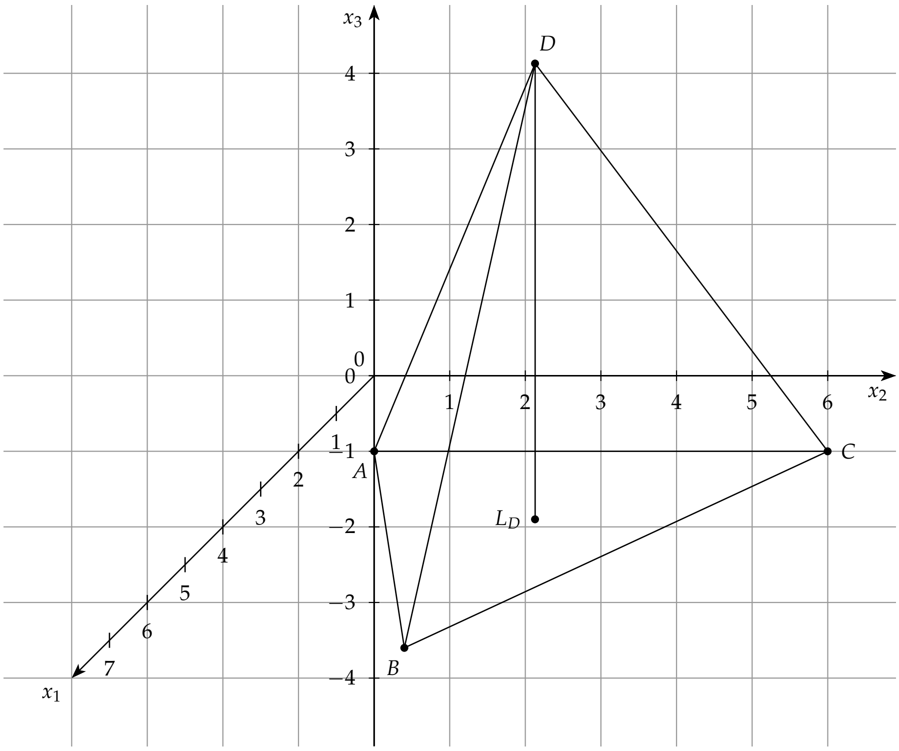
Durch Einsetzen in die Flächeninhaltsformel ergibt sich für G:

$G = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Der Inhalt der Grundfläche beträgt $9\sqrt{3}$ FE.

2. Schritt: Bestimmung von h durch Betrachtung des Schaubildes

Die Höhe h der Pyramide ist gleich dem Abstand der Spitze D zum Lotfußpunkt L_D von D bezüglich der Ebene der Grundfläche. Da es sich um eine gerade Pyramide handelt und die Grundfläche parallel zur x_1x_2 -Ebene ist, sitzt dieser Lotfußpunkt direkt unterhalb von D in der Ebene der Grundfläche.



Wenn L_D direkt unterhalb von D liegt, hat L_D die gleichen x_1- und x_2-Koordinaten wie D und unterscheidet sich nur bezüglich der x_3-Koordinate. Es fällt auf, dass die Punkte A, B und C der Grundfläche jeweils die gleiche x_3-Koordinate aufweisen, nämlich $x_3 = -1$. Damit haben automatisch alle Punkte der Ebene der Grundfläche diese x_3-Koordinate, also auch der Lotfußpunkt L_D.
L_D hat somit die Koordinaten:

$L_D(\sqrt{3}\,|\,3\,|-1)$

Die Höhe h ist nun gleich dem Abstand von D und L_D. Dieser entspricht gerade der Differenz der x_3-Koordinaten:

$h = 5 - (-1) = 6$

Die Höhe h beträgt somit 6 LE.

Durch Einsetzen der Ergebnisse für G und h ergibt sich das Volumen der Pyramide zu:

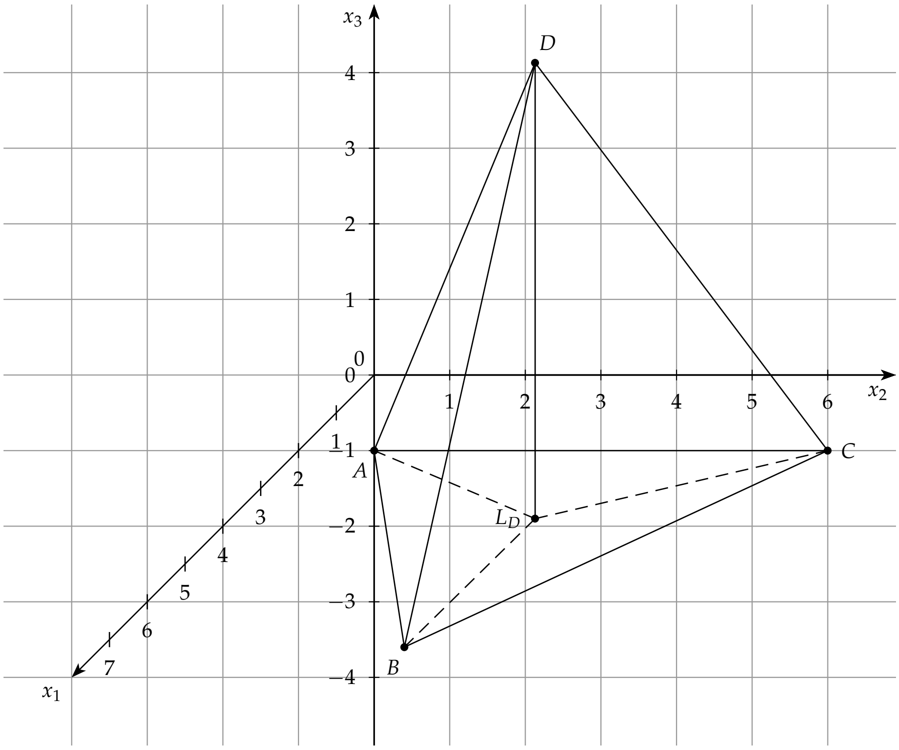
$$V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$
$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 6$$
$$V_P = 18\sqrt{3}$$

Das Volumen der Pyramide beträgt $18\sqrt{3}$ VE.

2.4 ▶ **Bestimmung des Punktes mit gleichem Abstand zu A, B, C und D** (5P)

Die gegebene Figur ist eine gerade Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche. Der Schwerpunkt des Dreiecks, also der Punkt, der den gleichen Abstand zu A, B und C hat, befindet sich daher am Lotfußpunkt L_D der Spitze D bezüglich der Ebene durch A, B und C.

Das Lot durch L_D steht senkrecht auf die Ebene durch $\triangle ABC$. Alle Punkte auf der Geraden durch D und L_D sind daher Punkte, die von A, B und C gleich weit entfernt sind.



Nun ist der Punkt auf dieser Geraden gesucht, für den gilt, dass er sowohl von den drei Punkten der Grundfläche als auch von der Spitze D den gleichen Abstand hat. Wir nennen diesen Punkt M. Da er sich auf der Geraden durch D und L_D bewegt, die parallel zur x_3-Achse ist, sind die x_1- und x_2-Koordinaten die gleichen wie bei L_D und nur die x_3-Koordinate ist variabel. Für M gilt somit:

$M(\sqrt{3}\,|\,3\,|\,m_3)$

Der Abstand von M zu einem der Eckpunkte der Grundfläche, etwa A, beträgt dann in Abhängigkeit von m_3:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AM}\right| &= \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(3-0)^2+(-m_3-1)^2}\\ &= \sqrt{3+9+1+2m_3+m_3^2}\\ &= \sqrt{13+2m_3+m_3^2}\end{aligned}$$

Der Abstand von M zur Spitze D beträgt in Abhängigkeit von m_3:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{DM}\right| &= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(3-3)^2+(-m_3+5)^2}\\ &= \sqrt{(5-m_3)^2}\\ &= 5-m_3\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{AM}\right|$ soll nun genauso lang sein wie $\left|\overrightarrow{DM}\right|$.
Setze die beiden Terme gleich und löse nach m_3 auf:

$$\begin{aligned}
\sqrt{13+2m_3+m_3^2} &= 5-m_3 && \mid\ ^2\\
13+2m_3+m_3^2 &= (5-m_3)^2\\
13+2m_3+m_3^2 &= 25-10m_3+m_3^2 && \mid\ -m_3^2\\
13+2m_3 &= 25-10m_3 && \mid\ -13+10m_3\\
12m_3 &= 12\\
m_3 &= 1
\end{aligned}$$

Probe (da das Quadrieren in Zeile 1 keine Äquivalenzumformung ist):

$$\begin{aligned}
\sqrt{13+2\cdot 1+1^2} &= 5-1\\
\sqrt{16} &= 4\\
4 &= 4 && \text{wahre Aussage!}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes M mit gleichem Abstand zu allen Eckpunkten der Pyramide lauten somit $M(\sqrt{3}\,|\,3\,|\,1)$.