a) ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (16P)

Im Aufgabenteil a) werden Lampen der Firma F_1 betrachtet. Laut Aufgabentext liegt bei dieser Firma eine Ausschussquote von 9 % vor. Da die Lampen der laufenden Produktion entnommen werden, kannst du sagen: Jede der entnommen Lampen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 9 % unbrauchbar. Da außerdem nur zwischen den beiden Merkmalsausprägungen „unbrauchbar“ und „nicht unbrauchbar“ unterschieden wird, kann die Anzahl der unbrauchbaren Lampen näherungsweise je durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

Ereignis A

Sei X_1 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in dieser Stichprobe beschreibt. Bestimme die Parameter der Binomialverteilung von X_1. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 = 1)$.

Ereignis B

Sei X_2 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in dieser Stichprobe beschreibt. Bestimme auch hier die Parameter der Binomialverteilung von X_1. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 \geq 2)$. Es bietet sich an, die Wahrscheinlichkeit über die des Gegenereignisses zu bestimmen.

Ereignis C

Die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in der Stichprobe kann also wieder durch X_2 beschrieben werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < 3)$.

Ereignis D

Zuletzt werden der Produktion 1.100 Lampen entnommen, allerdings wird dieses Mal die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen betrachtet. Da 9 % unbrauchbar sind, sind 91 % der Lampen funktionstüchtig. Die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen in der Stichprobe kann also durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X_3 mit $n = 1.100$ und $p = 0,91$ beschrieben werden. Aufgrund des großen Stichprobenumfangs kann X_3 vermutlich durch eine normalverteilte Zufallsgröße Z angenähert werden. Du kannst also so vorgehen:

- Berechne zunächst den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X_3.
- Untersuche, ob gilt: $\sigma > 3$. Wenn ja, so darf X_3 durch eine normalverteilte Zufallsgröße angenähert werden.
- Berechne mithilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit $P(971 \leq X_3 \leq 998)$. Denke an die Stetigkeitskorrektur von 0,5.

Hinweis: Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X_3 gilt:

- $\mu = n \cdot p$,
- $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$,
- $P(X \leq k) = \Phi\left(\dfrac{k - \mu + 0,5}{\sigma}\right)$, falls $\sigma > 3$ ist.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeit für die Annahme des Kartons berechnen** (4P)

Es ist bekannt, dass sich im Karton 30 Lampen der Firma F_2 befinden und dass genau 6 dieser Lampen defekt sind. Der Händler entnimmt dem Karton zwei Lampen ohne Zurücklegen. Wenn beide funktionstüchtig sind, dann nimmt er den Karton an.

Die Frage ist also: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler dem Karton zwei funktionstüchtige Lampen entnimmt?

Zu Beginn befinden sich 30 Lampen im Karton, von denen 6 defekt sind. Wenn die erste entnommen ist, dann befinden sich noch 29 Lampen im Karton. Mit der Pfadregel kannst die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen.

c) ▶ **Wahrscheinlichkeitsverteilung vervollständigen** (6P)

Betrachte die beiden fehlenden Einträge in der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie sind die Wahrscheinlichkeiten zu den Ereignissen $G = -0,98$ und $G = 0,51$. Überlege in einem ersten Schritt, welche Situationen bei den beiden Ereignissen vorliegen, d.h. welche Lampe verkauft wurde und ob sie funktionstüchtig bzw. defekt war. Berechne sodann die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Beachte dabei: Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben die Wahrscheinlichkeiten in der Summe den Wert 1. Es genügt also, wenn du eine der beiden Wahrscheinlichkeiten ausführlich berechnest.

▶ **Erwartungswert berechnen**

Du hast nun die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt. Den Erwartungswert kannst du nun so berechnen:

Seien g_i die die möglichen Werte von G und $P(G = g_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, jeweils für $i = 1, ..., 4$. Für den Erwartungswert $E(G)$ gilt dann:

$$E(G) = \sum_{i=1}^{4} (g_i \cdot P(G = g_i)).$$

In Worten kannst du sagen: Multipliziere jeden möglichen Wert von G mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit und addiere diese Ergebnisse.

d) ▶ **Fehler auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen** (4P)

Wir definieren zunächst einige Ereignisse:

- Sei L das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Leuchtsystem“,
- sei S das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Schraubmechanismus“,
- seien $\overline{L}$ und $\overline{S}$ die zugehörigen Gegenereignisse.

Das Ereignis: „Es tritt mindestens einer der beiden Fehler auf“ kannst du dann darstellen als $L \cup S$; das Ereignis „Es treten beide Fehler gleichzeitig auf“ entspricht dann $L \cap S$.

Aus der Aufgabenstellung kennst du die Werte:

- $P(S) = 0,02$
- $P(L \cap S) = 0,001$
- $P(L \cup S) = 0,069$

Du sollst nun untersuchen, ob die Fehler unabhängig voneinander auftreten. Dies ist der Fall, wenn die Ereignisse L und S stochastisch unabhängig sind. Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$P(L \cap S) = P(L) \cdot P(S)$.

Du kannst so vorgehen:

- Über eine Vierfeldertafel oder über den Additionssatz kannst du die Wahrscheinlichkeit $P(L)$ berechnen.
- Setze dann $P(L \cap S)$, $P(L)$ und $P(S)$ in die obige Gleichung ein und untersuche, ob sie erfüllt ist.