a) **Abbildungsvorschrift nachweisen** (15P)

Eine zentrische Streckung liegt genau dann vor, wenn $f_1(\overrightarrow{x}) - x_z = k\left(\overrightarrow{x} - x_z\right)$.

In unserem Fall ist also zu zeigen, dass $f_1(\overrightarrow{x}) - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

Wir versuchen also, den Ausdruck $3\left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ so umzuformen, dass er wie die Abbildungsvorschrift aussieht.

$$\begin{aligned}
f_1(\overrightarrow{x}) - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= 3\left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\
f_1(\overrightarrow{x}) - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= 3\overrightarrow{x} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
f_1(\overrightarrow{x}) - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= 3\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} && \mid + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
f_1(\overrightarrow{x}) &= 3\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} && \mid 3\overrightarrow{x} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} \\
&= 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es ist uns gelungen, die Abbildungsvorschrift zu beweisen.

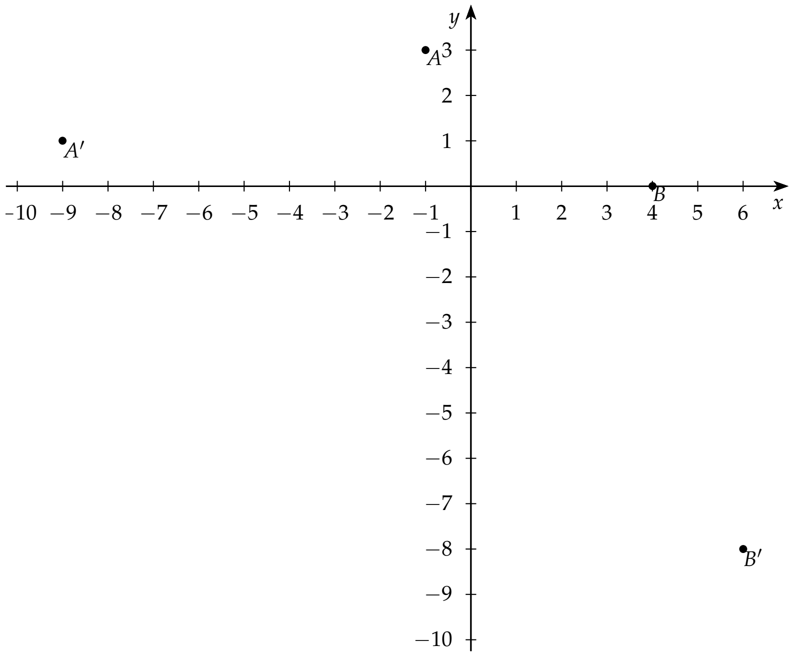
Bildpunkte A' und B' berechnen

Die Bildpunkte werden berechnet, indem die Koordinaten von A bzw. B für $\overrightarrow{x}$ eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
A' = f_1(A) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \\
B' = f_1(B) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgen die Bildpunkte $A'\,(-9|1)$ und $B'\,(6|-8)$.

Punkte in Koordinatensystem zeichnen



Nachweis, dass Z_1 der einzige Punkt ist, der fest bleibt

Wenn ein Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ auf sich selbst abgebildet wird, dann muss gelten:

$$f_1\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3v_1 + 0v_2 \\ 0v_1 + 3v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3v_1 - 6 \\ 3v_2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3v_1 - 6 &= v_1 \quad && \mid -v_1 + 6 \\ 2v_1 &= 6 && \mid : 2 \\ v_1 &= 3 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3v_2 - 8 &= v_2 \quad && \mid -v_2 + 8 \\ 2v_2 &= 8 && \mid : 2 \\ v_2 &= 4 \end{aligned}$$

Daraus folgt der Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, was dem Ortsvektor zum Punkt $Z_1\ (3|4)$ entspricht.

b) (1) **Lagebeziehung der Geraden untersuchen** (15P)

Zunächst stellen wir die Gleichungen der beiden Geraden auf.

$$g_{AB}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$g_{AB}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$g_{A'B'}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA'} + s \cdot \overrightarrow{A'B'}$$
$$g_{A'B'}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass die Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig sind, d.h. Vielfache voneinander:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Zwei Geraden mit linear abhängigen Richtungsvektoren verlaufen immer parallel oder sind identisch. Dies muss noch untersucht werden. Wir setzen den Stützvektor von g_{AB} in $g_{A'B'}$ ein. Wenn dieser ein Punkt auf $g_{A'B'}$ ist, so sind die Geraden identisch.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} -1 &= -9 + 15s \quad && | +9 \\ 8 &= 15s && |: 15 \\ \tfrac{8}{15} &= s \end{aligned}$$

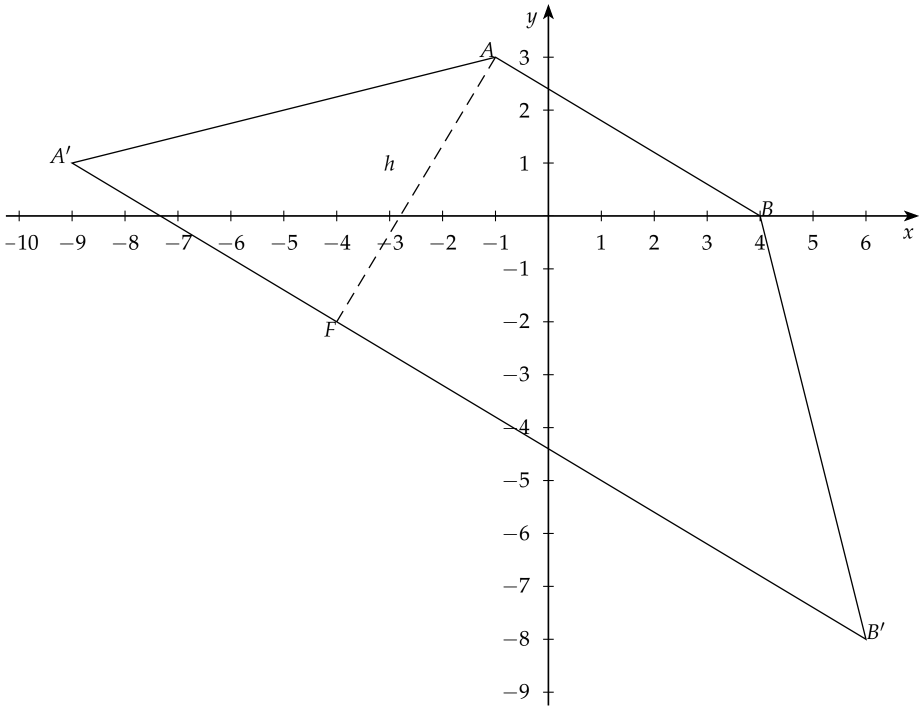
Aus der zweiten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 3 &= 1 - 9s \quad && | -1 \\ 2 &= -9s && |: (-9) \\ -\tfrac{2}{9} &= s \end{aligned}$$

Dafür sich für s zwei unterschiedliche Werte ergeben, liegt der Punkt nicht auf der Geraden. g_{AB} und $g_{A'B'}$ sind also echt parallel.

Flächeninhalt von $A'B'BA$ berechnen

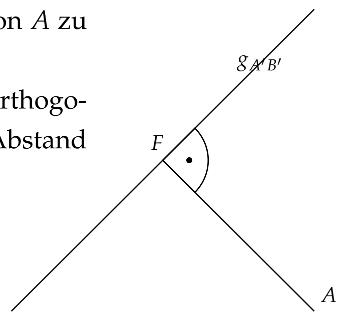
Wir wollen uns zunächst eine Skizze ansehen, um eine Vorstellung von der Form dieses Vierecks zu bekommen.



Das Viereck $A'B'BA$ ist ein Trapez. Der Flächeninhalt eines Trapezes berechnet sich über die Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei a und c die beiden parallelen Seiten sind und h die Höhe des Trapezes.

Wie in der Abbildung gezeigt, ist h genau der Abstand von A zur Geraden $g_{A'B'}$.

Der Abstand von A zur Geraden $g_{A'B'}$ ist der Abstand von A zu dem Punkt F auf der Geraden, der A am nächsten liegt.
Hierzu suchen wir den Punkt F so, dass der Vektor $\overrightarrow{AF}$ orthogonal auf den Richtungsvektor der Geraden h steht. Der Abstand von A zu h ist dann
der Betrag dieses Vektors $\overrightarrow{AF}$.



Alle Punkte F auf $g_{A'B'}$ haben die Koordinaten $F\,(-9+15s|1-9s)$. Der Vektor $\overrightarrow{AF}$ lautet also:

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -9+15s-(-1) \\ 1-9s-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+15s \\ -2-9s \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor soll orthogonal auf den Richtungsvektor von $g_{A'B'}$ stehen, d.h. das Skalarprodukt der beiden muss Null ergeben.

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{pmatrix} -8+15s \\ -2-9s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix} \\
0 &= 15 \cdot (-8+15s) - 9 \cdot (-2-9s) \\
0 &= -120 + 225s + 18 + 81s \\
0 &= -102 + 306s && |+102 \\
102 &= 306s && |:306 \\
\frac{1}{3} &= s
\end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert für s in den Vektor $\overrightarrow{AF}$ ein, so ergibt sich:

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -8+5 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Der Abstand von A zur Geraden $g_{A'B'}$ und somit die Höhe des Trapezes ist genau der Betrag dieses Verbindungsvektors:

$$\left| \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

Nun können wir den Flächeninhalt des Trapezes bestimmen.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{A'B'}\right|}{2} \cdot \sqrt{34} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}\right|}{2} \cdot \sqrt{34} \\ &= \frac{\sqrt{25+9}+\sqrt{225+81}}{2} \cdot \sqrt{34} = \frac{\sqrt{34}+\sqrt{306}}{2} \cdot \sqrt{34} = \frac{\sqrt{34}+\sqrt{9\cdot 34}}{2} \cdot \sqrt{34} \\ &= \frac{\sqrt{34}+3\sqrt{34}}{2} \cdot \sqrt{34} = \frac{4\sqrt{34}}{2} \cdot \sqrt{34} = 2\sqrt{34} \cdot \sqrt{34} = 2 \cdot 34 = 68 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Vierecks $A'B'BA$ beträgt 68 FE.

c) **Begründung der Abbildung auf sich selbst** (11P)

Wir haben am Beispiel der Punkte A und B und deren Bildpunkten A' und B' gesehen, dass die Punkte zwar ihre Position ändern, dass die Richtung der Geraden durch diese Punkte jedoch erhalten bleiben. Die Gerade durch A und B verläuft parallel zur Geraden durch A' und B'. Somit ändert sich an der Richtung der Bildgeraden von g nichts.

Sehen wir uns nun die Gleichung von g an sich an. Wenn wir für $r = 1$ einsetzen, ergibt sich der Punkt $Z_1\,(3|4)$. Dies ist der einzige Punkt, der wieder auf sich selbst abgebildet wird (s. Teilaufgabe 1)).

Somit bleibt die **Richtung** der Geraden gleich und sie verläuft nach wie vor durch den Punkt Z_1, d.h. die Bildgerade g' ist genau wieder die Gerade g.

(Es gibt keine Gerade h, die parallel zu g auch durch den Punkt Z_1 verläuft, ohne mit g identisch zu sein.)

Abbildung auf sich selbst rechnerisch zeigen

Wir setzen die Gleichung der Geraden g für $\overrightarrow{x}$ in die Abbildung f_1 ein und berechnen die Gleichung der Bildgerade.

$$\begin{aligned}
f_1\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+2r\\1+3r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\cdot(1+2r)+0\\0+3\cdot(1+3r)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3+6r\\3+9r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-3+6r\\-5+9r\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun sieht die Gleichung der Bildgeraden anders aus als die von g, doch wir wollen zeigen, dass die Gleichungen die gleichen Geraden beschreiben.

Zunächst sehen wir, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Somit sind die Vektoren linear abhängig und die Geraden verlaufen parallel. Die beiden Geraden sind identisch, wenn der Stützvektor der einen auch auf der anderen liegt. Wir setzen also die Koordinaten des Stützvektors von g in die Gleichung der Bildgeraden ein:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} \qquad \left|-\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}\right.\\
\begin{pmatrix}1-(-3)\\1-(-5)\end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} &= r\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 4 &=& 6r \quad |:6\\
\text{II} & 6 &=& 9r \quad |:9\\
\hline
\text{I} & \frac{2}{3} &=& r\\
\text{II} & \frac{2}{3} &=& r
\end{array}$$

Damit ist nachgewiesen, dass der Stützvektor von g auch auf der Bildgeraden liegt. Somit sind die beiden Geraden identisch.

d) **Schnittpunkt von $g_{PP'}$ und q berechnen** (9P)

Wir bestimmen zu nächst die Geradengleichung von $g_{PP'}$. Diese Gerade verläuft durch die Punkte P und P':

$$g_{PP'}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung des Schnittpunktes setzen wir die Geradengleichung von $g_{PP'}$ und q gleich.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -4 = s \\ \text{II} & 5 + 4t = -s \end{array}$$

Aus I folgt direkt $s = -4$. Diesen Wert für s können wir in die Gleichung von q einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die beiden Geraden $g_{PP'}$ und q schneiden sich im Punkt $S\,(-1|1)$.

Gleichung von f_2 in Matrixform bestimmen

Schreiben wir zunächst alles auf, was wir aus der Aufgabenstellung wissen. Es handelt sich um eine zentrische Streckung. Somit hat f_2 die Form:

$$f_2(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}_z = k \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_z)$$

Weiterhin wissen wir, dass das Zentrum Z_2 auf der Geraden q liegt. Alle Punkte auf q haben allgemein die Koordinaten $Q\,(3+s|-3-s)$.

Setzen wir dies für $\overrightarrow{x}_z$ in unsere Gleichung ein:

$$f_2(\overrightarrow{x}) - \begin{pmatrix} 3+s \\ -3-s \end{pmatrix} = k \cdot \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3+s \\ -3-s \end{pmatrix} \right)$$

Zu guter letzt wissen wir, dass der Bildpunkt von P auf den Punkt P' abgebildet wird, d.h:

$$f_2\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP'}.$$

Setzen wir also für $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP}$ und für $f_2(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{OP'}$ ein:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+s \\ -3-s \end{pmatrix} = k \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+s \\ -3-s \end{pmatrix} \right)$$
$$\begin{pmatrix} -1-(3+s) \\ 6-(-3-s) \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1-(3+s) \\ 2-(-3-s) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -4-s \\ 9+s \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4-s \\ 5+s \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & -4-s = & k\cdot(-4-s) \\ \text{II} & 9+s = & k\cdot(5+s) \\ \hline \text{I} & -4-s = & k\cdot(-4-s) \\ \text{IIa} & 5 = & k\cdot(5+s)+k\cdot(-4-s) \quad \mid \text{I}+\text{II} \end{array}$$

Wir betrachten nur IIa:

$$\begin{aligned} 5 &= k\cdot(5+s)+k\cdot(-4-s) \quad \mid k \text{ ausklammern} \\ 5 &= k\cdot(5+s-4-s) \\ 5 &= k\cdot 1 \end{aligned}$$

Setzen wir $k = 5$ in I ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} -4-s &= 5\cdot(-4-s) \\ -4-s &= -20-5s \quad \mid +20+s \\ 16 &= -4s \quad \mid : (-4) \\ -4 &= s \end{aligned}$$

Als Streckfaktor k ergibt sich also $k = 5$. Um das Zentrum Z_2 zu bestimmen, setzen wir $s = -4$ in die Gleichung von q ein:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -3-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich $Z_2\,(-1|1)$. Die Gleichung von f_2 soll in Matrixdarstellung gegeben werden, d.h. in der Form:

$$f_2\left(\overrightarrow{x}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} + (1-k)\cdot \overrightarrow{x}_z$$

Setzen wir also die Werte ein:

$$\begin{aligned} f_2\left(\overrightarrow{x}\right) &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} + (1-5)\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$