a) **▶ Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a angeben** (8P)

Der Definitionsbereich von f_a umfasst alle Werte, die für x in den Funktionsterm von f_a eingesetzt werden dürfen. Bei der Scharfunktion f_a handelt es sich um eine Schar gebrochenrationaler Funktionen mit:

$$f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 + 3}{2 \cdot x - 1}.$$

Beim Bestimmen der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ einer gebrochenrationalen Funktion betrachtest du den Nenner dieser Funktion. Bestimme alle Werte für x, für welche sich der Nenner der Funktion zu Null ergibt. Diese Werte müssen aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a dann ausgeschlossen werden, da eine Division durch Null nicht zulässig ist.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \qquad && \mid +1 \\ 2x &= 1 && \mid :2 \\ x &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a ergibt sich zu: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0{,}5\}$ bzw. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0{,}5\}$.

▶ Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$

Nun sollst du das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ in Abhängigkeit des Parameters a untersuchen. Weiterhin sollst du dabei die Fälle $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$ unterscheiden.

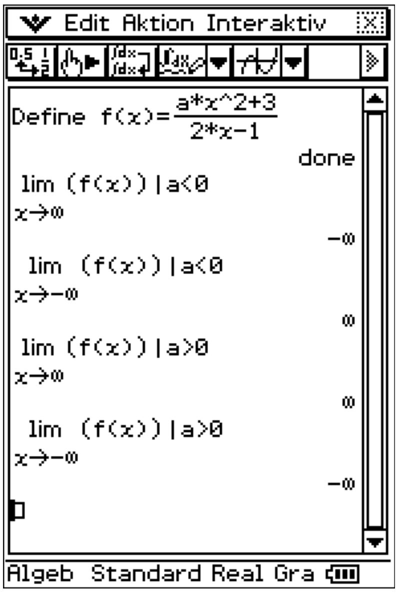
Die gesuchten Grenzwerte kannst du im Main-Modus deines CAS über den entsprechenden Befehl bestimmen. Füge beim Berechnen dieser jeweils entsprechende Nebenbedingungen ein, um eine Fallunterscheidung nach $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$ durchzuführen. Gesucht sind hier also die Grenzwerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ und für $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$.

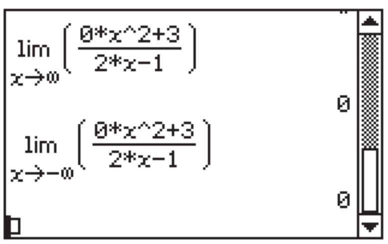
Berechnen der gesuchten Grenzwerte

Die gesuchten Grenzwerte kannst du über den `limes`-Befehl im Main-Modus deines CAS berechnen. Diesen fügst du über diese Eingabenfolge in den Main-Modus ein:

`Keyboard → 2D → CALC`

Außerdem ist es empfehlenswert, den Funktionsterm von f_a im Main-Modus vor dem Berechnen der Grenzwerte festzulegen. Um die Fallunterscheidung nach $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$ durchzuführen, führst du diese Fälle als Nebenbedingung bei der Berechnung der Grenzwerte ein. Tue dies, durch das Setzen eines senkrechten Strichs (siehe rechts) bzw. durch Einsetzen des entsprechenden Wertes für a (siehe unten).





Die gesuchten Grenzwerte sind also:

1. Fall: $a < 0$	**2. Fall: $a = 0$**	**3. Fall: $a > 0$**
$\lim\limits_{x\to\infty}(f_a(x)) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}(f_a(x)) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}(f_a(x)) = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f_a(x)) = \infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f_a(x)) = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f_a(x)) = -\infty$

▶ **Bestimmen des gesuchten Parameterwertes**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph genau einer Scharfunktion auf einer Geraden liegt. Deine Aufgabe ist es hierbei, den zugehörigen Parameterwert für a zu bestimmen.

Die Funktionenschar f_a stellt für bestimmte a eine gebrochenrationale Funktion a dar. Um den Parameterwert für a zu bestimmen, für welchen der zugehörige Graph der Schar auf einer Geraden liegt, muss Parameter a so gewählt werden, dass sich der Term der Scharfunktion f_a zu einem linearen Term ergibt.

Das heißt, a muss so gewählt werden, dass

- der Nenner des Terms der Scharfunktion f_a eliminiert wird und
- der quadratische Teil des Zählers sich zu einem linearen ergibt.

Tipp: Versuche a so zu wählen, dass sich eben diese Bedingungen an den Funktionsterm von f_a durch geschicktes Erweitern und Kürzen ergeben. Denke dabei an die dritte binomische Formel.

Wählst du $a = -12$ und setzt dieses in den Funktionsterm der Scharfunktion f_a ein, so ergibt sich:

$$f_{-12}(x) = \frac{-12 \cdot x^2 + 3}{2 \cdot x - 1}.$$

Durch Ausklammern von (-3) im Zähler kannst du den Nenner, sowie den quadratischen Teil des Funktionsterms $f_{-12}(x)$ von f_{-12} durch das Anwenden der dritten binomischen Formel eliminieren:

$$\begin{aligned} f_{-12}(x) &= \frac{-12 \cdot x^2 + 3}{2 \cdot x - 1} = \frac{(-3) \cdot (4 \cdot x^2 - 1)}{2 \cdot x - 1} = \frac{(-3) \cdot ((2 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x + 1))}{2 \cdot x - 1} \\ &= \frac{-3 \cdot (2 \cdot x + 1)}{1} = -6 \cdot x - 3 \end{aligned}$$

Für $a = -12$ liegt der Graph der zugehörigen Scharfunktion auf der Geraden f_{-12} mit $f_{-12}(x) = -6 \cdot x - 3$.

b) ▶ **Bestimmen des Parameters a und der Art des Extremums** (12P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass einer der Graphen G_a der Scharfunktion f_a einen Extrempunkt E mit dem Koordinaten $E(-1 \mid f_a(-1))$ besitzt. Deine Aufgabe ist es nun, den Parameterwert a jener Funktion f_a zu bestimmen, welche eben diesen Extrempunkt E besitzt. Des Weiteren ist es hier deine Aufgabe, die Art des Extremums festzustellen.

Bei einer Extremstelle x_E sind dabei folgende zwei Bedingungen immer erfüllt:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$.

Da dir bekannt ist, dass sich die Extremstelle bei $x_E = -1$ befindet, kannst du mit Hilfe der notwendigen Bedingung den gesuchten Parameterwert von a berechnen. Bestimme dazu zunächst die erste Ableitungsfunktion f_a' von f_a und ermittle, für welchen Parameterwert für a diese an der Stelle $x_E = -1$ die notwendige Bedingung für eine Extremstelle erfüllt. Bestimme anschließend mit Hilfe der zweiten Ableitung f_a'' von f_a und dem bestimmten Parameterwert für a die Art des Extremums bei $x_E = -1$, wobei für dieses gilt:

- $f_a''(x_E) < 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Maximum.
- $f_a''(x_E) > 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Minimum.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Erste und zweite Ableitung von f_a bilden

2. Schritt: Parameterwert a über notwendige Bedingung bestimmen

3. Schritt: Art des Extremums bestimmen

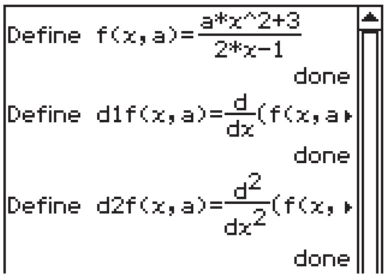
1. Schritt: Erste Ableitung und zweite Ableitung von f_a bilden

Die gesuchte erste und zweite Ableitung von f_a berechnest du mit deinem CAS. Verwende dazu den Ableitungsbefehl im Main-Modus deines CAS.

Füge den Ableitungsbefehl über die unten stehende Eingabenfolge ein.

`Keyboard → 2D → CALC`

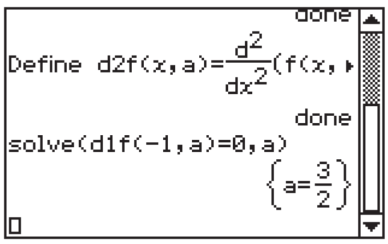
Wende den Ableitungsbefehl anschließend wie rechts an. Hier wurde der Term der ersten Ableitungsfunktion f_a' unter `d1f` und der Term der zweiten Ableitungsfunktion f_a'' unter `d2f` festgelegt.



2. Schritt: Parameterwert a über notwendige Bedingung bestimmen

Soll die notwendige Bedingung für eine Extremstelle bei $x_E = -1$ erfüllt sein, so muss an dieser Stelle $f_a'(-1) = 0$ gelten. Stelle diese Gleichung auf und löse sie nach a, um den gesuchten Parameterwert für a zu bestimmen.

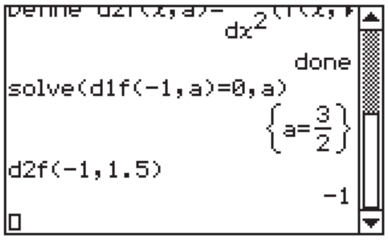
Verwende dazu den `solve`-Befehl im Main-Modus deines CAS. Dieser Befehl löst die in den Befehl eingetragene Gleichung nach jener Variablen, welche getrennt durch ein Komma, hinter der Gleichung in die Klammer eingetragen wird.
Wende diesen Befehl wie rechts an, um das gesuchte a zu bestimmen.



Der gesuchte Parameterwert für a ist also $a = \frac{3}{2} = 1,5$.

3. Schritt: Art des Extremums bestimmen

Setze nun $a = 1{,}5$ und $x_E = -1$ in den Term der oben bestimmten zweiten Ableitungsfunktion f''_a ein, um die Art der Extremstelle bei $x_E = -1$ feststellen zu können. Verwende dazu wie im Schaubild rechts dein CAS.



Da $f''_{1,5}(-1) < 0$ gilt, besitzt die Funktion $f_{1,5}$ bei $x_E = -1$ ein lokales Maximum. Beim Extrempunkt E handelt es sich also um einen Hochpunkt.

► Nachweisen, dass für $a > 0$ zwei Extremstellen existieren

Nun sollst du nachweisen, dass die Scharfunktion für Parameterwerte von a mit $a > 0$ zwei Extremstellen besitzt. Wie oben schon, lauten auch hier die Bedingungen an eine Extremstelle x_E:

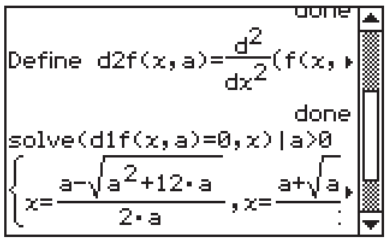
- Notwendige Bedingung: $f'_a(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f''_a(x_E) \neq 0$.

Im ersten Schritt zeigst du also, dass die erste Ableitungsfunktion zwei Nullstellen besitzt, wenn $a > 0$ gilt. Hast du das getan, so zeigst du im zweiten Schritt, dass diese Null- bzw. potentielle Extremstellen die hinreichende Bedingung erfüllen, falls $a > 0$ gilt. Verwende bei der Berechnung dein CAS, die notwendigen Ableitungsfunktionen hast du im vorherigen Aufgabenteil bestimmt.

1. Schritt: Bestimmen der potentiellen Extremstellen der Scharfunktion f_a

Setze den Term der ersten Ableitungsfunktion f'_a mit Null gleich, um die potentiellen Extremstellen von f_a zu berechnen.

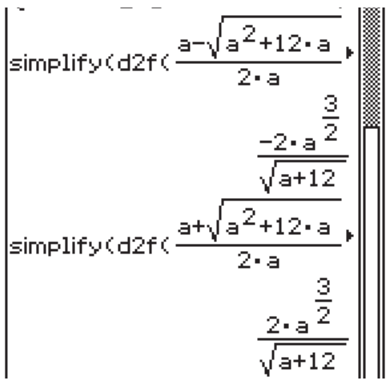
Die erste Ableitungsfunktion von f_a hast du oben schon bestimmt und diese unter `d1f` im Main-Modus deines CAS festgelegt. Setze diese nun gleich Null und löse die entstehende Gleichung mit dem `solve`-Befehl. Vergiss dabei nicht die Nebenbedingung $a > 0$ mit einem senkrechten Strich der Gleichung beizufügen.



Für $a > 0$ besitzt die Scharfunktion f_a bei $x_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 12 \cdot a}}{2 \cdot a}$ und $x_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 12 \cdot a}}{2 \cdot a}$ jeweils potentielle Extremstellen.

2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung

Setze nun x_1 und x_2 in den Funktionsterm der zweiten Ableitungsfunktion f''_a (gespeichert unter `d2f`) ein, um die hinreichende Bedingung an den potentiellen Extremstellen x_1 und x_2 zu überprüfen. Nimmt f''_a jeweils Funktionswerte ungleich Null bei x_1 und x_2 für $a > 0$ an, so hast du gezeigt, dass sich an diesen Stellen Extremstellen befinden. Denke auch hier wieder daran, die Bedingung $a > 0$ mit einem senkrechten Strich bei der Überprüfung beizufügen.



Da $f''_a(x_1) \neq 0$ und $f''_a(x_2) \neq 0$ für $a > 0$ gilt, hast du nachgewiesen, dass die Scharfunktion für $a > 0$ zwei Extremstellen besitzt.

▶ Bestimmen des Parameterwertes so, dass die Geraden einen Abstand von 2 LE besitzen

Hier ist es nun deine Aufgabe, den Parameter a der Scharfunktion f_a so anzupassen, dass die zur y-Achse parallelen Geraden durch die beiden Extrempunkte der Schar einen Abstand von 2 LE besitzen. Beachte dabei, dass hier weiterhin $a > 0$ gelten muss.

Der Abstand zwischen zwei zur y-Achse parallelen Geraden bestimmt sich über deren Schnittpunkte mit der x-Achse. Die zur y-Achse parallelen Geraden, welche durch die Extrempunkte der Scharfunktion f_a verlaufen, besitzen in Abhängigkeit von a diese Gleichungen:

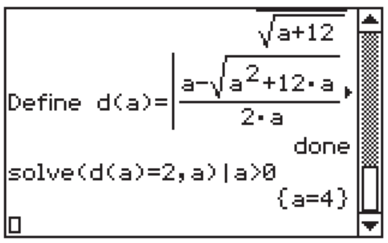
- Gerade durch Extremstelle x_1: $x = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 12 \cdot a}}{2 \cdot a}$
- Gerade durch Extremstelle x_2: $x = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 12 \cdot a}}{2 \cdot a}$

Der Abstand d zwischen diesen Geraden berechnet sich nach den obigen Annahmen über diese Formel:

$d = |x_1 - x_2|$.

Willst du nun Parameter a so bestimmen, dass der Abstand zwischen den zur y-Achse parallelen Geraden durch die Extrempunkte der Graphen von f_a 2 LE beträgt, so setzt du $d = 2$ in den oben aufgestellten Ansatz für den Abstand zwischen den Geraden ein und löst die entstehende Gleichung nach Parameter a.

Verwende dazu dein CAS. Bestimme den gesuchten Parameterwert für a über den `solve`-Befehl im Main-Modus deines CAS (siehe rechts).
Vergiss dabei nicht, wieder die Nebenbedingung $a > 0$ der zu lösenden Gleichung beizufügen.



Parameter a muss den Wert $a = 4$ annehmen, damit der Abstand der zur y-Achse parallelen Geraden durch die Extrempunkte der Graphen von f_a zwei Längeneinheiten beträgt.

c) **▶ Nachweisen, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen Punkt und Tangente haben** (8P)

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen Schnittpunkt S haben und in diesem auch eine gemeinsame Tangente t. Haben alle Graphen G_a der Scharfunktion f_a einen gemeinsamen Schnittpunkt S, so sind die Koordinaten dieses Schnittpunkts unabhängig von Parameter a. Das heißt, schneidet man zwei Funktionen, so ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts S unabhängig vom Parameter a.

Willst du die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts S berechnen, so betrachtest du zwei unterschiedliche Funktionen der Schar f_a mit

- Funktion f_{a_1} mit beliebigen Parameterwert a_1,
- Funktion f_{a_2} mit beliebigen Parameterwert a_2 und
- $a_1 \neq a_2$.

Hast du diese Funktionen definiert, so bestimmst du deren Schnittstelle. Jene Schnittstelle, welche sich unabhängig von a_1 oder a_2 ergibt, entspricht der x-Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes S. Bestimme die gesuchte Schnittstelle durch Gleichsetzen der Funktionsterme von f_{a_1} und f_{a_2}. Verwende dazu dein CAS und vergesse nicht die Nebenbedingung $a_1 \neq a_2$ zu berücksichtigen. Berechne zuletzt die vollständigen Koordinaten von S durch Einsetzen der x-Koordinaten von S in $f_a(x)$. Die zugehörige y-Koordinate von S muss ebenfalls unabhängig von Parameter a sein.

Anschließend sollst du nachweisen, dass die Graphen G_a im gemeinsamen Punkt S eine gemeinsame Tangente t haben.
Damit alle Graphen G_a bei S eine gemeinsame Tangente besitzen, müssen folgende zwei Bedingungen an der Stelle x_S erfüllt sein:

- Der Funktionswert aller Scharfunktionen muss bei x_S unabhängig von a sein.
- Der Ableitungswert bzw. die Steigung der Scharfunktionen f_a muss an der Schnittstelle $x_S = 0$ unabhängig von a sein, so dass alle f_a hier die gleiche Steigung besitzen.

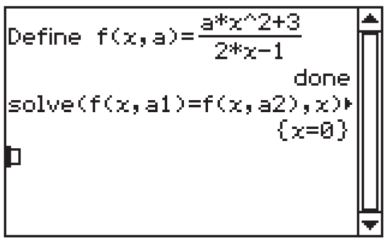
Da du die erste Bedingung bereits im ersten Lösungsschritt dieser Aufgabe zeigen musst, musst du hier nur noch nachweisen, dass alle f_a bei $x_S = 0$ die gleiche Steigung besitzen. Berechne dazu den Ableitungswert $f_a'(x_S)$ und zeige, dass dieser unabhängig von a ist.

1. Schritt: Berechnen des gemeinsamen Schnittpunktes S

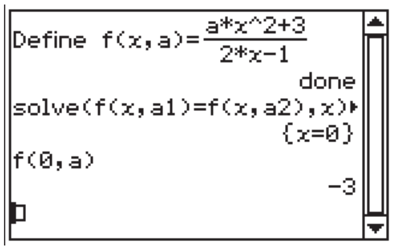
Definiere in deinem CAS Funktion f_{a_1} und f_{a_2}. Setze die zugehörigen Funktionsterme gleich und bestimme so die Schnittstellen von f_{a_1} und f_{a_2}.

Wie oben schon erwähnt entspricht jene Schnittstelle x_S welche sich unabhängig von a_1 und a_2 ergibt, der gesuchten Schnittstellen bzw. der x-Koordinaten von S.

Setze die Funktionsterm von f_{a_1} und f_{a_2} gleich und löse diese wie rechts im Main-Modus deines CAS und denke dabei an die Nebenbedingung $a_1 \neq a_2$.
Da $a_1 \neq a_2$ gilt, befindet sich die gesuchte Schnittstelle bei $x_S = 0$.

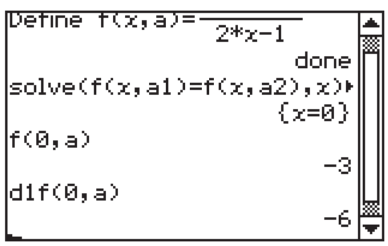


Setze $x_S = 0$ in den Funktionsterm $f_a(x)$ der Scharfunktion f_a ein, um die zugehörige y-Koordinate zu bestimmen. Ist diese ebenfalls unabhängig von a, so hast du nachgewiesen, dass alle Graphen G_a der Schar f_a in S einen gemeinsamen Punkt besitzen.
Die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts aller Graphen G_a sind $S(0 \mid -3)$.



2. Schritt: Nachweisen der gemeinsamen Tangente

Die erste Ableitungsfunktion f_a' von f_a hast du bereits in einem vorhergegangenem Aufgabenteil mit deinem CAS bestimmt. Diese haben wir hier unter `d1f` festgelegt. Berechne nun mit dieser den Ableitungswert von f_a an der Stelle $x_S = 0$. Ergibt sich ein Ableitungswert unabhängig von a, so hast du gezeigt, dass alle Graphen G_a der Schar bei $x_S = 0$ bzw. im Punkt $S(0 \mid -3)$ eine gemeinsame Tangente haben.



Da sich mit $f_a'(0) = -6$ ein Ableitungswert unabhängig von a ergibt, hast du gezeigt, dass alle Graphen G_a im Punkt S eine gemeinsame Tangente haben.

▶ Ermitteln einer Gleichung der gemeinsamen Tangente t

Nun sollst du eine Gleichung der gemeinsamen Tangente t ermitteln. Da Tangente t eine Gerade ist, besitzt diese in Abhängigkeit von m und b diese Gleichung:

$t(x) = m \cdot x + b$, wobei gilt:

- m: Steigung der Tangenten und
- b: y-Achsenabschnitt der Tangenten.

Dir ist bekannt, dass Tangente t durch den Punkt S mit $S(0 \mid -3)$ verlaufen soll. Da S auf der y-Achse liegt, gilt für den y-Achsenabschnitt b von t: $b = -3$. Des Weiteren weißt du, dass die Tangente t eine Steigung von $f_a'(0) = -6$ besitzen soll. Für m gilt demnach: $m = -6$.

Die Gleichung der gemeinsamen Tangenten t ist: $t(x) = -6 \cdot x - 3$.

▶ Zeigen, dass t_a die gegebene Gerade in ein und demselben Punkt Q schneidet

Im letzten Aufgabenteil dieser Aufgabe sollst du zeigen, dass für $a \neq -12$ jede Tangente t_a an G_a im Punkt $P_a(-1 \mid f_a(-1))$ die Gerade g mit der Gleichung $g: y = -6 \cdot x - 3$ in ein und demselben Punkt Q schneidet.

Willst du dies zeigen, so bestimmst du im ersten Schritt die Gleichung der Tangenten t_a an G_a im Punkt $P_a(-1 \mid f_a(-1))$. Verwende dazu den `tanLine`-Befehl deines CAS. Dieser Befehl liefert dir den Funktionsterm einer Tangenten an einen beliebigen Graphen für jede gewünschte, in den Befehl eingetragene Stelle. Alternativ kannst du die Gleichung der Tangenten t_a auch über die allgemeine Tangentenformel bestimmen.

Hast du Tangente t_a bestimmt, so bestimmst du den Schnittpunkt Q dieser mit der Geraden g. Setze dazu die zugehörigen Geradengleichungen gleich und beachte die Nebenbedingung $a \neq -12$. Ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts Q dieser unabhängig von Parameter a, so hast du gezeigt, dass jede Tangente t_a an G_a im Punkt P_a die Gerade g in ein und demselben Punkt Q schneiden.

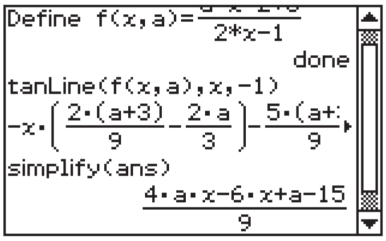
1. Schritt: Bestimmen der Tangentengleichung von t_a

Die Syntax des `tanLine`-Befehl lautet wie folgt:

`tanline(f(x),x,x`$_{\mathtt{P_a}}$`)`

- $\mathtt{f_a(x)}$: Funktionsterm jener Funktion, an welche die Tangente angelegt werden soll.
- `x`: Variable, von welcher die betreffende Funktion abhängig ist.
- $\mathtt{x_{P_a}}$: Stelle, an welche die Tangente an den Graphen angelegt werden soll.

Wende mit diesen Informationen den `tanLine`-Befehl wie im unten stehenden Schaubild an, um eine Gleichung der Tangenten t_a zu bestimmen.



Die Gleichung der Tangenten t_a ist:

$$t_a(x) = \frac{4 \cdot a \cdot x - 6 \cdot x + a - 15}{9} = \frac{4 \cdot a - 6}{9} \cdot x + \frac{a - 15}{9}.$$

Alternativ: Bestimmen über allg. Tangentenformel

Alternativ kannst du die Gleichung der Tangenten t_a auch über die allgemeine Tangentengleichung bestimmen. Die allgemeine Gleichung einer Tangenten an den Graphen von f_a an eine bestimmte Stelle x_0 ist:

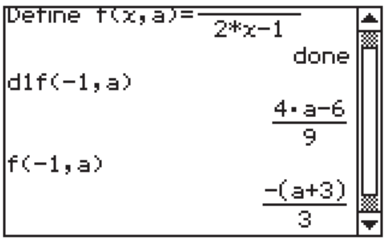
$$t_a(x) = f_a'(x_0) \cdot (x - x_0) + f_a(x_0).$$

x_0: Stelle, an welche die Tangente an die Graphen von f_a angelegt werden soll.

$f_a'(x_0)$: Ableitungswert der ersten Ableitung f_a' von f_a bei x_0.

$f_a(x_0)$: Funktionswert von f_a bei x_0.

Da die Tangente im Punkt P_a an die Graphen von f_a angelegt werden soll, gilt $x_0 = -1$. Bestimme also den Ableitungswert $f_a'(-1)$ von f_a' und den Funktionwert $f_a(-1)$ an der Stelle $x_0 = -1$.



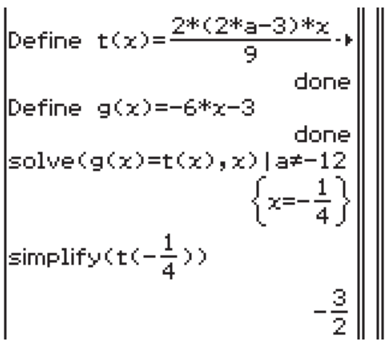
Die Gleichung der Tangenten t_a an die Graphen von f_a ist:

$$t_a(x) = \frac{4 \cdot a - 6}{9} \cdot (x - 1) - \frac{a + 3}{3} = \frac{4 \cdot a - 6}{9} \cdot x + \frac{a - 15}{9}.$$

2. Schritt: Bestimmen des Schnittpunkts Q von t_a und g

Setze die Geradengleichungen von t_a und g gleich, um die Schnittstelle x_Q von t_a und g zu bestimmen. Löse die resultierende Gleichung mit dem `solve`-Befehl deines CAS und beachte dabei die Nebenbedingung $a \neq -12$.

Hast du die x-Koordinate von Q bestimmt, so berechnest du die zugehörige y-Koordinate von Q durch Einsetzen von x_Q in die Geradengleichung von t_a oder g. Sind die vollständigen Koordinaten von Q unabhängig von Parameter a, so hast du gezeigt, dass alle Tangenten t_a für $a \neq -12$ ein und denselben Schnittpunkt Q mit der Geraden g besitzen.

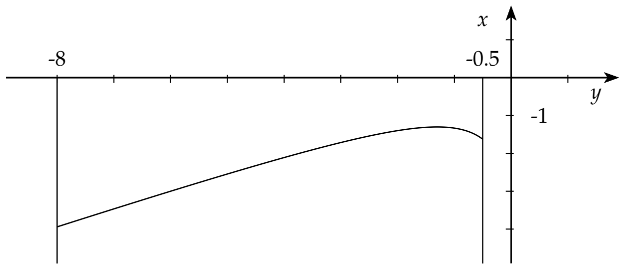


Die vollständigen Koordinaten von Q ergeben sich also zu: $Q(-\frac{1}{4} \mid -\frac{3}{2})$. Da diese somit unabhängig von Parameter a sind, hast du gezeigt, dass alle Tangenten t_a die Gerade g für $a \neq -12$ in ein und demselben Punkt Q schneiden.

d) **► Berechnen der Querschnittsfläche des Brückenträgers** (6P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Brückenträgers berechnen. Der Graph G_1 schließt diesen Flächeninhalt modellhaft mit den zur y-Achse parallelen Geraden $x = -8$ und $x = -0,5$ und der x-Achse ein. Der berechnete Flächeninhalt soll auf zwei Dezimalstellen gerundet werden.

Um den Flächeninhalt A_B der Querschnittsfläche zu berechnen, berechnest du das Integral von f_1 über dem Intervall [-8;-0,5] . Berechnen kannst du es über den Hauptsatz der Integralrechnung. Die Grenzen des Integrals sind $x_U = -8$ und $x_O = -0,5$, da die Querschnittsfläche durch die beiden Geraden $x = -8$ und $x = -0,5$, die parallel zur y-Achse laufen, begrenzt wird.



Da die zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse liegt, wie du der Abbildung oben entnehmen kannst, berechnest du den Betrag des Integrals, da negative Werte für Flächeninhalte keinen Sinn ergeben.

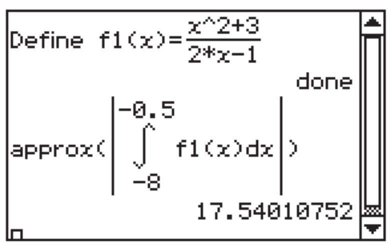
Berechnen des Flächeninhalts A_B des Querschnitts

Eine Integration über f_1 in den Grenzen $x_U = -8$ und $x_O = -0,5$ ergibt:

$$A_B = \left| \int_{-8}^{-0,5} (f_1(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

Dieses Integral kannst du im Main-Modus deines CAS berechnen. Lege dazu zunächst den Funktionsterm von f_1 im Main-Modus deines CAS fest. Anschließend fügst du über die unten stehende Eingabenfolge den Integral-Befehl in den Main-Modus deines CAS ein.

$\boxed{\texttt{Keyboard} \rightarrow \texttt{2D} \rightarrow \texttt{CALC}}$



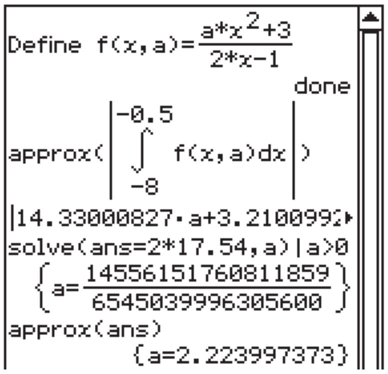
Hast du diesen eingefügt, so berechnest du den gesuchten Flächeninhalt wie im Schaubild rechts.
Der Flächeninhalt der Querschnittsfläche des Brückenträgers beträgt ungefähr 17,54 Flächeneinheiten.

► Ermitteln eines $a > 0$, so dass sich die Querschnittsfläche verdoppelt

Der Aufgabenstellung kannst du hier entnehmen, dass, wenn man im gleichen Intervall statt G_1 andere Graphen G_a der Scharfunktion f_a zur Modellierung des Brückenträgers verwendet, es zu einer Veränderung der Querschnittsfläche kommt. Deine Aufgabe ist es nun dabei, den Parameter a mit $a > 0$ zu bestimmen, für welchen sich der beschriebene Flächeninhalt im Vergleich zu dem mithilfe von G_1 berechneten Flächeninhalt verdoppelt.

Oben hast du den Flächeninhalt der Querschnittsfläche des Brückenträgers über eine Integration über f_1 im Intervall $[-8; -0,5]$ bestimmt. Berechne diesen Flächeninhalt nun zunächst in Abhängigkeit von a. Integriere dazu über f_a im Intervall $[-8; -0,5]$. Hast du den von a abhängigen Flächeninhalt der Querschnittsfläche bestimmt, so setze den Term für diese gleich dem doppelten Flächeninhalt von oben. Über das Lösen dieser Gleichung bestimmst du den gesuchten Parameterwert für a.

Integriere also über f_a in den Grenzen des Intervalls $[-8; -0,5]$, verwende dazu wie oben den Integral-Befehl im Main-Modus deines CAS. Hast du das von a abhängige Integral berechnet, so setzt du den resultierenden Term mit $A_B = 2 \cdot 17,54 = 35,08$ gleich und löst die resultierende Gleichung mit dem `solve`-Befehl wie im Schaubild rechts. Denke dabei an die Nebenbedingung $a > 0$.
Der gesuchte Parameterwert für a ist also: $a = 2,224$.



e) ▶ **Mittlerer Anstieg von G_1 berechnen** (6P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den mittleren Anstieg des Graphen G_1 im Intervall $-8 \leq x \leq -4$ berechnen.

Den mittleren Anstieg m kannst du berechnen, indem du die Steigung der Sekante berechnest, die durch die beiden Punkte $P_1(-4|f_1(-4))$ und $P_2(-8|f_1(-8))$ verläuft. Wenn du die Steigung der Sekante berechnest, so bedeutet das, dass du die Steigung einer Geraden durch die beiden Punkte berechnest. Damit näherst du die Steigung von f_1 durch den mittleren Anstieg zwischen P_1 und P_2 im Intervall $[-8; -4]$ an.

Berechne also zum Lösen dieser Aufgabe zunächst die vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2 und berechne dann über folgenden Ansatz den gesuchten mittleren Anstieg m:

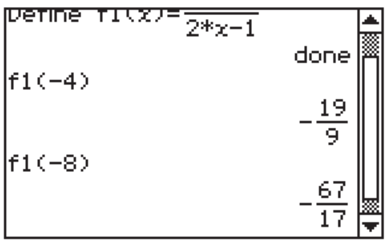
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, mit $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$.

1. Schritt: Bestimmen der vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2

Setze $x_1 = -4$ und $x_2 = -8$ in den Funktionsterm von f_1 ein, um die vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2 zu berechnen. Mit dem CAS ergibt sich:

$f_1(-4) = -\dfrac{19}{9} \implies P_1(-4 \mid -\frac{19}{9})$

$f_1(-8) = -\dfrac{67}{17} \implies P_1(-8 \mid -\frac{67}{17})$



2. Schritt: Berechnen des mittleren Anstiegs m

Den gesuchten mittleren Anstieg berechnest du nun über den oben aufgestellten Ansatz:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ mit $P_1(-4 \mid -\frac{19}{9})$ und $P_2(-8 \mid -\frac{67}{17})$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{-\frac{67}{17} - \left(-\frac{19}{9}\right)}{-8-(-4)} \\
&= \frac{-\frac{603}{153} + \frac{323}{153}}{-4} \\
&= \frac{-\frac{280}{153}}{-4} \\
&= \frac{70}{153}
\end{aligned}
$$

Der mittlere Anstieg von G_1 im Intervall $-8 \leq x \leq -4$ ist also $m = \frac{70}{153} \approx 0,4575$.

▶ **Nachweis, dass sich mittlerer und maximaler Anstieg um weniger als 0,02 unterscheiden**

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass die untere Grenze des Brückenträgers aus Teilaufgabe d) auch als Gerade beschrieben werden kann, indem du nachweist, dass sich der mittlere Anstieg m und der maximale Anstieg von G_1 im Intervall $[-8;-4]$ um weniger als 0,02 unterscheiden.

Den mittleren Anstieg hast du oben schon berechnet, dieser war:

$m = \frac{70}{153} \approx 0,4575.$

Berechne hier also den maximalen Anstieg von f_1 im Intervall $[-8;-4]$. Das tust du, indem du zunächst die zweite Ableitung der Funktion f_1 betrachtest. Die zweite Ableitung von f_1 gibt die Steigung der Steigung an. Der maximale Anstieg von f_1 im untersuchten Intervall liegt folglich also da, wo die erste Ableitung f_1' ein Maximum bzw. die zweite Ableitung f_1'' eine Nullstelle besitzt.

Bestimme also zunächst die zweite Ableitungsfunktion f_1'' von f_1 und bestimme deren potentiellen Extremstellen von f_1' bzw. die Wendestellen von f_1. Betrachte hierzu folgende Bedingung für eine Wendestelle bei x_W:

- Notwendige Bedingung: $f_1''(x_W) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_1'''(x_W) \neq 0$.

Können jedoch keine Wendestellen von f_1 im betrachteten Intervall gefunden werden, so musst du dieses auf Randmaxima von f_1' untersuchen. Betrachte dazu die Steigung an den Rändern des angegebenen Intervalls.

Hast du die Stellen mit der maximalen Steigung bestimmt, so berechnest du mit Hilfe der ersten Ableitungsfunktion f_1' die Steigung an jener Extrem- bzw. Wendestelle, welche im betrachteten Intervall liegt. Somit hast du den maximalen Anstieg berechnet.

Wenn du den maximalen Anstieg berechnet hast, so bildest du die Differenz zwischen diesem und dem mittleren Anstieg. Ist dieser kleiner als 0,02, dann lässt sich die untere Begrenzung des Brückenträgers durch eine Gerade beschreiben.

Gehe also so vor:

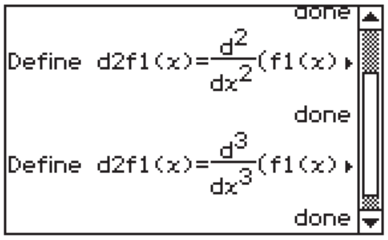
1. Schritt: Die zweite und dritte Ableitung von f_1 bestimmen

2. Schritt: Maximalen Anstieg ermitteln

3. Schritt: Differenz ermitteln und beurteilen

1. Schritt: Die zweite und dritte Ableitung von f_1 bestimmen

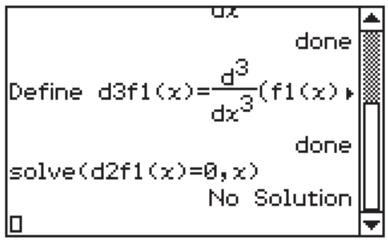
Die gesuchte zweite und dritte Ableitungsfunktionen f_1'' bzw. f_1''' ergeben sich wie oben über den Ableitungsbefehl des CAS. Wende dazu diesen Befehl wie im Schaubild rechts im Main-Modus deines CAS an. Hier wurde der Term der zweiten Ableitungsfunktion unter `d2f1` und der Term der dritten Ableitungsfunktion unter `d3f1` festgelegt.



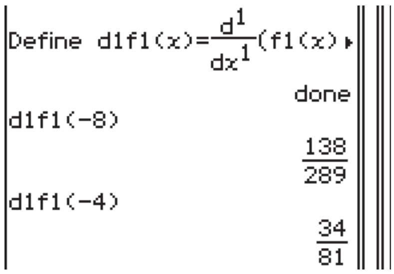
2. Schritt: Maximalen Anstieg berechnen

Den maximalen Anstieg berechnest du, indem du die zweite Ableitung mit Null gleichsetzt.

Verwende dazu wie oben den `solve`-Befehl im Main-Modus deines CAS.
Da der CAS `no Solution` liefert, besitzt f_1 keine Wendestellen. Das gegebene Intervall muss auf Randmaxima der Steigung untersucht werden, da hier nur ein beschränktes Intervall betrachtet wird.



Berechne also die Steigung an den Randstellen x_1 und x_2 durch Einsetzen dieser in den Term der ersten Ableitungsfunktion f_1'. Verwende dazu ebenfalls dein CAS (siehe rechts). Es ergibt sich:



$$f_1'(-8) = \frac{138}{289}$$

$$f_1'(-4) = \frac{34}{81}$$

Da $f_1'(-8) > f_1'(-4)$ gilt, liegt der maximale Anstieg mit $f_1'(-8) = \frac{138}{289} \approx 0{,}4775$ an der Randstelle $x_1 = -8$.

3. Schritt: Unterschied des mittleren und maximalen Anstiegs ermitteln

Um nun die Differenz der untersuchten Anstiege zu berechnen, subtrahierst du diese wie folgt voneinander:

$$\left|\frac{138}{289} - \frac{70}{153}\right| = \frac{52}{2.601} \approx 0{,}019992 < 0{,}02.$$

Somit unterscheiden sich der maximale und mittlere Anstieg von G_1 im gegebenen Intervall um weniger als 0,02. Deshalb kann die untere Grenze des Brückenträgers aus Teilaufgabe d) auch als Gerade beschrieben werden.