1. ▶ $c = 56$ **nachweisen** (10BE)

Allgemein hat h die Gleichung $h(x) = \frac{c}{x}$. In Abbildung 1 ist der Punkt $K(14;4)$ gegeben, der auf dem Graphen von h liegt. Setze die Koordinaten von K ein in die Gleichung von h und löse nach c auf:

$$4 = \frac{c}{14} \quad | \cdot 14$$
$$56 = c$$

Damit ist $c = 56$ mittels Punktprobe nachgewiesen.

▶ **Durchmesser der Flaschenöffnung berechnen**

Die Flaschenöffnung befindet sich an der Stelle $x = 25$. Dabei stellt der Graph von h die „obere Kante“ des Flaschenhalses dar. Der **Radius** der Flaschenöffnung entspricht also der **y-Koordinate** des Punktes $R\,(25 \mid h(25))$:

$$r = h(25) = \frac{56}{25} = 2,24.$$

Damit hat die Flaschenöffnung einen **Durchmesser** von $2 \cdot 2,24 = 4,48\,\text{LE}$.

▶ **Winkel der Schnittlinien in Punkt K berechnen**

Die Linie, die von **links** kommt verläuft parallel zur x-Achse und hat die Gleichung $y = 4$. Die Linie, die sie in Punkt K schneidet, ist der Graph von h.

Gesucht ist also der **Steigungswinkel des Graphen von h im Punkt K zur Horizontalen**. Hierzu benötigst du die **Steigung** von h in K.

Die Steigung einer Funktion wird dir immer gegeben durch ihre **erste Ableitung**. Berechne also zunächst h':

$$h(x) = \frac{56}{x} = 56 \cdot x^{-1}$$
$$h'(x) = -56 \cdot x^{-2} = -\frac{56}{x^2}$$

Berechne nun mit $h'(14)$ die **Steigung** des Graphen von h im Punkt K:

$$h'(14) = -\frac{56}{14^2} \approx -0,2857$$

Die Steigung des Graphen von h in K entspricht der **Steigung der Tangente** an den Graphen von h in K. Den Steigungswinkel α der Tangente zur Horizontalen berechnest du über den **Tangens**:

$$\alpha = \tan^{-1}(-0,2857) \approx 15,94°.$$

Die beiden in der Abbildung dargestellten Linien schneiden sich in K unter einem Winkel von $15,94°$.

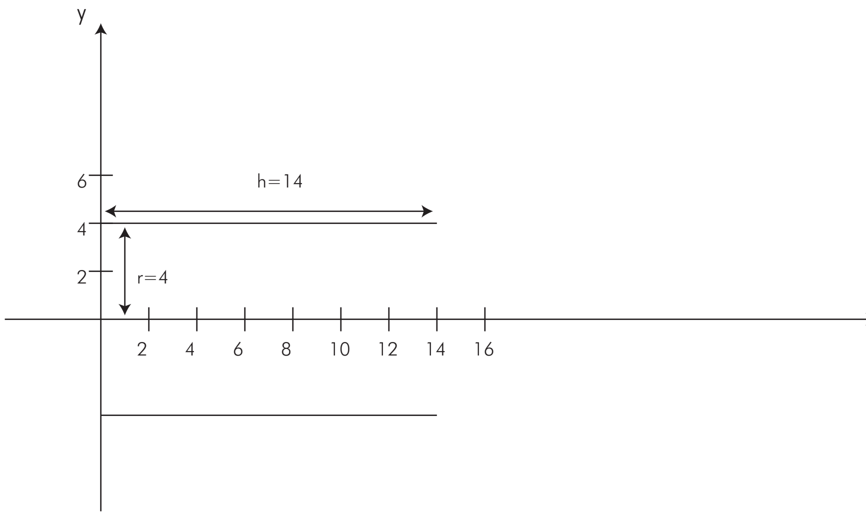
2.1 ▶ **Volumen der Flasche bestimmen** (17BE)

Die Flasche setzt sich aus zwei **Teilkörpern** zusammen: Aus einem **Zylinder** und aus einem **Rotationskörper**. Betrachte die beiden Teilkörper einzeln.

▶ Volumen des Zylinders berechnen

Das Volumen V_{Zyl} eines Zylinders berechnet sich über die Formel $V_{\text{Zyl}} = G \cdot h$, wobei G für die Grundfläche und h für die Höhe des Zylinders steht. Die Grundfläche ist hierbei ein **Kreis**. Der Flächeninhalt A eines Kreises berechnet sich über die Formel $A = \pi \cdot r^2$.

Der Radius r der Grundfläche des Zylinders beträgt 4 LE. Die Höhe h des Zylinders beträgt $h = 14$ LE



Für das Volumen des Zylinders ergibt sich damit nach der Formel:

$V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 14 = 703{,}717$ VE

▶ Volumen des Rotationskörpers berechnen

Der Rotationskörper entsteht durch **Rotation des Graphen von** h um die x-Achse. Als Grenzen dienen dabei die x-Koordinaten der Punkte K und R, d.h. $x = 14$ und $x = 25$.

Das Volumen V_{rot} eines Rotationskörpers berechnet sich über die Formel $V_{\text{rot}} = \pi \cdot \int_a^b (h(x))^2 \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
V_{\text{rot}} &= \pi \cdot \int_{14}^{25} \left(\frac{56}{x}\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_{14}^{25} \cdot \left(\frac{3136}{x^2}\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_{14}^{25} \cdot \left(3136 \cdot x^{-2}\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[3136 \cdot \frac{1}{-1} \cdot x^{-1}\right]_{14}^{25} \\
&= \pi \cdot \left[-\frac{3136}{x}\right]_{14}^{25} \\
&= \pi \cdot \left[\left(-\frac{3136}{25}\right) - \left(-\frac{3136}{14}\right)\right] \\
V_{\text{rot}} &= \pi \cdot (-125{,}44 + 224) = \pi \cdot 98{,}56 \approx 309{,}635
\end{aligned}$$

Das Volumen der gesamten Flasche setzt sich aus den Volumina der beiden Teilkörper zusammen:

$V = 703{,}717 + 309{,}635 = 1013{,}352$ VE

Es ist davon auszugehen, dass 1 LE genau 1 cm entspricht. Damit entspricht 1 VE genau 1 cm^3.

Der Inhalt einer Flasche wird immer in **Litern** angegeben. $1\,\ell$ entspricht genau $1.000\,\text{cm}^3$. Damit beträgt das Volumen der Flasche etwa $1013,352\,\text{cm}^3 = 1,013352\,\ell$.

Als Inhaltsangabe wird damit $1\,\ell$ auf der Flasche stehen.

2.2 ► **Gesamthöhe der Flasche bestimmen**

Betrachte deine Rechnung aus Teilaufgabe 2.1. Bei einer Gesamthöhe von 25 LE gilt für das Volumen der Flasche:

$$V = V_{Zyl} + V_{rot} = 703{,}717\,\text{VE} + \pi \cdot \int_{14}^{25} (h(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Nun wird der Hals der Flasche auf einer unbestimmte Länge vergrößert. Diese Länge sei zunächst b. Dann gilt für das Volumen der Flasche:

$$V(b) = 703{,}717\,\text{VE} + \pi \cdot \int_{14}^{b} (h(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Volumen soll nun den Wert 1.250 annehmen:

$$\begin{aligned}
1.250 &= 703{,}717 + \pi \cdot \int_{14}^{b} (h(x))^2\,\mathrm{d}x && -703{,}717 \\
546{,}283 &= \pi \cdot \int_{14}^{b} (h(x))^2\,\mathrm{d}x && \text{Bildung der Stammfunktion etc: siehe oben} \\
546{,}283 &= \pi \cdot \left[-\frac{3136}{x}\right]_{14}^{b} && |:\pi \\
\frac{546{,}283}{\pi} &= \left(-\frac{3136}{b}\right) - \left(-\frac{3136}{14}\right) && \\
\frac{546{,}283}{\pi} &= -\frac{3136}{b} + 224 && |-224 \\
\frac{546{,}283}{\pi} - 224 &= -\frac{3136}{b} && |\cdot b \\
b \cdot \left(\frac{546{,}283}{\pi} - 224\right) &= -3136 && |:\left(\frac{546{,}283}{\pi} - 224\right) \\
b &\approx 62,58
\end{aligned}$$

Die Flasche muss um etwa $62,58 - 25 = 37,58\,\text{cm}$ verlängert werden und ist schließlich etwa $62,58\,\text{cm}$ lang.

3. ► **Gleichungssystem aufstellen** (7BE)

Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 3. Grades handelt, deren Graph durch die Punkte $L(0 \mid 4)$, $K(14 \mid 4)$ und $M(7 \mid 4)$ verläuft. Außerdem soll sie im Punkt K **ohne Knick** in den Flaschenhals übergehen. Somit muss die **Steigung** dieser Funktion an der Stelle $x = 14$ gleich der Steigung von h an dieser Stelle sein. Der Name der Funktion sei f.

Da f eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist, gilt: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit der ersten Ableitung $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Durch die drei gegebenen Punkte ergeben sich zunächst die drei Bedingungen:

$f(0) = 4, \quad f(14) = 4, \quad$ und $\quad f(7) = 4.$

Was die Steigung einer Funktion betrifft, so wird sie immer durch die **erste Ableitung** gegeben. Da die Steigung von f an der Stelle $x = 14$ gleich der Steigung von h an dieser Stelle sein soll, gilt: $f'(14) = h'(14) = -0,2857$ (s. Aufgabenteil 1).

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{I} & f(0) = & 4 & = & a\cdot 0 & + & b\cdot 0 & + & c\cdot 0 & + d \\
\text{II} & f(14) = & 4 & = & a\cdot 14^3 & + & b\cdot 14^2 & + & c\cdot 14 & + d \\
\text{III} & f(7) = & 4 & = & a\cdot 7^3 & + & b\cdot 7^2 & + & c\cdot 7 & + d \\
\text{IV} & f'(14) = & -0,2857 & = & 3a\cdot 14^2 & + & 2b\cdot 14 & + & c & \\
\hline
\text{I} & & 4 & = & & & & & & d \\
\text{II} & & 4 & = & 2744a & + & 196b & + & 14c & + d \\
\text{III} & & 4 & = & 343a & + & 49b & + & 7c & + d \\
\text{IV} & & -0,2857 & = & 588a & + & 28b & + & c &
\end{array}$$

Setze $d = 4$ in II und III ein. Durch den Befehl $|\ -4$ auf beiden Seiten von II und III erhältst du schließlich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{II} & 0 & = & 2744a & + & 196b & + & 14c \\
\text{III} & 0 & = & 343a & + & 49b & + & 7c \\
\text{IV} & -0,2857 & = & 588a & + & 28b & + & c
\end{array}$$

Eine Lösung des LGS ist nicht verlangt.

4. ▶ **Wahre Aussagen begründen** (6BE)

Aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen von f zum Punkt M gilt auf jeden Fall: die beiden **Flächen**, die von der waagerechten Geraden und dem Graphen von f eingeschlossen werden, sind **gleich groß**.

Es ist aber nicht danach gefragt, ob die **Querschnittsfläche** gleich groß ist, sondern ob das **Volumen** sich verändert.

Bei der Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers wird mit dem **Quadrat einer Funktion** gerechnet. Die Funktionswerte werden also **mit sich selbst multipliziert**.
Auf der einen Seite werden durch den Graphen von f nun Funktionswerte **kleiner**, auf der anderen Seite werden sie **größer**. Durch die Multiplikation mit sich selbst folgt jedoch, dass die **größer gewordenen Funktionswerte** viel mehr ins Gewicht fallen. Das Volumen, das durch die **größer gewordenen Funktionswerte** geschaffen wird, ist **größer** als das Volumen, das durch die **kleiner gewordenen Funktionswerte** verloren geht.

Damit ist Antwort C: „Das Volumen der Flasche wird größer“ korrekt.